UN OVALE A DEUX POINTS ISOCORDES ?

Autor(en): **Ehrhart, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41534

UN OVALE A DEUX POINTS ISOCORDES ?

par E. Ehrhart

On dit qu'un ovale possède un point isocorde, nécessairement intérieur, si toutes les cordes qui y passent ont même longueur. Pour montrer qu'il existe de tels ovales, autres que le cercle, il suffit d'en donner un exemple. *Le limaçon de Pascal* répond à la question, si $b \geqq 2a > 0$ dans son équation polaire $r = a \cos \theta + b$. En effet il est alors ovale, et son pôle est bien un point isocorde, puisque

$$a \cos \theta + b + a \cos(\theta + \pi) + b = 2b .$$

Mais on sait qu'il existe une infinité d'autres ovales à un point isocorde, qui dépendent d'une fonction $r = f(\theta)$ quasi-arbitraire [1]). Par contre on a démontré qu'il n'en existe aucun possédant trois de ces points.

Quant à l'ovale à deux points isocordes, malgré tout le travail qui lui a été consacré depuis un demi-siècle, jamais personne n'a pu dire avec une certitude absolue s'il existe ou non.

Le problème fut posé en 1917 par Blaschke [1]. Dès le début on se rendait compte de sa difficulté: il s'agit en effet de déterminer une courbe par une propriété globale, et non pas locale comme en calcul intégral.

En 1952 Dirac [3] a montré que si cet ovale existe, il a les propriétés suivantes:

Il a un centre de symétrie (le milieu du segment OO′ qui joint ses points isocordes).

Il a deux axes de symétrie (la droite OO′ et donc aussi la médiatrice de OO′).

Il n'a pas de point anguleux.

La variation du rayon OM est strictement monotone, quand M parcourt un demi-bord de l'ovale, en allant d'un sommet à l'autre (les sommets étant les intersections A, A' avec la droite OO′).

A une similitude près, l'ovale est entièrement déterminé par son *excentricité* $\left(\text{c'est-à-dire le rapport } \dfrac{OO'}{AA'}\right)$

---

1) On appelle roue de Reuleau un ovale qui a même hauteur dans toutes les directions. Pour toute podaire convexe d'une telle roue par rapport à un point intérieur, ce point est isocorde.

Helfenstein [4] a montré qu'il n'existe pas d'ovale à deux points isocordes, si une certaine fonction qui le définit est six fois dérivable aux sommets. Comme d'autre part E. Wirsing [6] a démontré que le bord de l'ovale hypothétique est une courbe analytique (« regulär-analytisch »), sa non-existence serait donc démontrée. Mais Wirsing pense que la preuve d'Helfenstein, qui s'appuie sur une dérivabilité locale, doit contenir une erreur ([6], p. 304). A son avis, l'inexistence de l'ovale doublement isocorde ne peut résulter que d'une considération globale. Le problème est encore cité en 1966 par Stanley Ogilvy parmi les questions ouvertes [7].

Je me propose de ramener le problème géométrique à une question de suite récurrente, d'en déduire l'inexistence de l'ovale doublement isocorde pour une excentricité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, ainsi que pour une liste de valeurs inférieures à $\frac{1}{2}$, et de montrer de cette manière que l'existence de cet ovale est très improbable, quelle que soit l'excentricité.

I

Pour montrer qu'il n'existe pas d'ovale à deux points isocordes, il suffirait d'établir qu'une suite récurrente x_n, que nous allons voir, n'est pas monotone.

Prenons comme unité la longueur commune des isocordes, et donnons nous la distance $OO' = a$. Le milieu I de OO' étant centre de symétrie de l'ovale Ω, les points A, A' de la droite OO' tels que $IA = IA' = \frac{1}{2}$ appartiennent à Ω. Nous les plaçons dans l'ordre A', O, O', A. L'ovale étant symétrique par rapport à la droite OO', un point B, situé sur sa perpendiculaire en O à la distance $\frac{1}{2}$, fait également partie de Ω. Rapportons le plan aux axes Ox, Oy, orientés respectivement par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Soit M_n un point de Ω d'affixe

$$z_n = r_n e^{i\theta n} = x_n + iy_n .$$

L'extrémité M_n' de la corde $M_n M_n' = 1$ menée par O a pour affixe $z_n - e^{i\theta n}$ et le symétrique de M_n' par rapport à I est un point M_{n+1} de Ω [1] d'affixe

$$z_{n+1} = a + e^{i\theta n} - z_n , \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{i}{2} .$$

si on prend B pour point M_0.

1) On démontre facilement que le point $M_n + 2$ coïncide avec l'extrémité P de la corde $M'_n P = 1$ passant par O'.

On en déduit sans peine deux systèmes de récurrence:

$$(I)\quad\begin{cases} 1)\quad x_{n+1} = a + x_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} - 1\right), & x_0 = 0\,, \\[2ex] 2)\quad y_{n+1} = y_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} - 1\right), & y_0 = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

$$(II)\quad\begin{cases} 3)\quad tg\,\theta_{n+1} = \dfrac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n + \dfrac{a}{1-r_n}}\,, & \theta_0 = \dfrac{\pi}{2}\,, \\[2ex] 4)\quad r_{n+1}^2 = a^2 + 2a\,(1-r_n)\cos\theta_n + (1-r_n)^2\,, & r_0 = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Comme $r_n < 1$ pour Ω, on voit par 3) que $\theta_{n+1} < \theta_n$ et par 2) que $y_n > 0$, quel que soit n.

Soit M_n'' le symétrique de M_n par rapport à Ox.

On sait que *Ω n'existe pas si pour un n, $r_{n+1} < r_n$*, car on a vu que $0M$ croît quand M parcourt le bord de A' vers A. *Il en est de même si pour un n, $x_{n+1} < x_n$*, car l'angle $M_n\,M_{n+1}\,M_n''$, inscrit dans l'ovale, serait alors rentrant.

Remarque. La suite x_n a un comportement intéressant. Les suites x_{2k} et x_{2k+1} sont toutes les deux croissantes, car $x_n < x_{n+2}$, puisque 1) permet d'écrire

$$x_n + x_{n+1} = a + \cos\theta_n < a + \cos\theta_{n+1} = x_{n+1} + x_{n+2}\,.$$

Or le calcul électronique montre (du moins pour tous les a traités) qu'à un certain rang n', $x_{n'} > \dfrac{a+1}{2}$. Donc $x_n > \dfrac{a+1}{2}$ pour tous les indices de même parité que n' et supérieurs à lui, et $x_n < \dfrac{a+1}{2}$ pour tous les indices supérieurs à n' et de parité contraire. Les premiers convergent donc vers une valeur $x' > \dfrac{a+1}{2}$ et les seconds vers une valeur $x'' < \dfrac{a+1}{2}$, avec $x' + x'' = a + 1$. Mais le calcul électronique montre que x' et x'' sont très voisins de $\dfrac{a+1}{2}$ lorsque a est petit. Ainsi, pour $a = 0{,}03$,

$$\frac{1+a}{2} - x_{463} \simeq 14 \cdot 10^{-25} .$$

II

Il n'existe pas d'ovale doublement isocorde d'excentricité supérieure ou égale à ½.

Nous distinguerons deux cas:

1) $a \geqq 0{,}6$. Il suffira de montrer que $r_2^2 < r_1^2$. Puisque

$$r_1^2 = a^2 + 1/4 , \qquad \text{et} \qquad r_2^2 = 5/4 - 1/2r_1 ,$$

cette inégalité se réduit à

$$4a^4 - 7a^2 + 2 < 0 , \qquad \text{soit} \qquad (7-\sqrt{17})/8 < a^2 < (7+\sqrt{17})/8 .$$

Comme $0 < a < 1$, il faut donc $a > \left[(7-\sqrt{17})/8\right]^{-\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{0{,}3598}$, valeur légèrement inférieure à 0,6.

2) $0{,}5 \leqq a \leqq 0{,}6$. Il suffit de montrer que pour ces valeurs

$$x_3 > \frac{a+1}{2}$$

Or,

$$x_2 = 2a\,(1+4a^2)^{-1/2} , \qquad x_3 = a + x_2\big((1/r_2)-1)\big) ,$$

et l'inégalité à démontrer prend donc la forme

$$f(a) = \big(5/4 - (4a^2+1)^{-1/2}\big)^{-1/2} - 1 - \frac{1-a}{4a}(4a^2+1)^{1/2} > 0 .$$

La fonction $f(a)$ est la différence de

$$u(a) = \big(5/4 - (4a^2+1)^{-1/2}\big)^{-1/2} - 1 , \qquad v(a) = \frac{1-a}{4a}(4a^2+1)^{1/2} ,$$

qui sont décroissantes pour $a > 0$. Dans un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, de bornes positives, $f(a)$ est donc minorée par $F(\alpha, \beta) = u(\beta) - v(\alpha)$.

Nous avons alors partagé l'intervalle [0,5; 0,6] en 25 intervalles égaux et déterminé pour chacun $F(\alpha, \beta)$ à l'aide d'un calculateur électronique. Toutes les valeurs obtenues étant positives, $f(a) > 0$ dans [0,5; 0,6].

III

L'existence d'un ovale doublement isocorde est improbable pour $a < \frac{1}{2}$.

Pour une série de valeurs de l'excentricité inférieures à $\frac{1}{2}$, nous avons déterminé par calcul électronique[1]) le plus petit u pour lequel $x_n > \dfrac{a+1}{2}$:

a	n	n'	a	n	n'	a	n	n'
0,05	249	238	0,27	9	10	0,35	7	8
0,06	175	166	0,28	9	10	0,36	7	8
0,1	47	44	0,29	9	8	0,38	5	6
0,2	17	16	0,3	9	8	0,4	5	6
0,22	15	14	0,31	7	8	0,42	5	6
0,23	13	12	0,32	7	8	0,44	5	6
0,24	13	12	0,325	7	8	0,46	5	4
0,25	11	12	0,333	7	8	0,48	5	4
0,26	11	10	0,34	7	8			

Ω n'existe donc pas pour ces 26 valeurs de a. La continuité par rapport à a de la construction géométrique, jointe à la régularité de la table, nous fait penser qu'il en est probablement ainsi pour tout $a < \frac{1}{2}$.

Remarque. On constate bien que les valeurs de x_n sont oscillantes quand n est assez grand, de manière plus précise dès que l'on rencontre un $x_{n'} < x_{n'-1}$. Dans la table précédente n' figure dans la troisième colonne.

Voici, par exemple, les dernières valeurs de x_n et de y_n pour $a = 0{,}05$ (donc $\dfrac{a+1}{2} = 0{,}525$):

1) Pour $a \geqq 0{,}1$ nous nous sommes servis d'une machine à 9 chiffres significatifs, mais pour $a < 0{,}1$ nous avons dû faire appel à une machine effectuant tous les calculs avec 25 chiffres. Nous avons également effectué les calculs pour $a = 0{,}01$, $0{,}02$, $0{,}03$ et $0{,}04$. Toutefois, les valeurs obtenues ne sont pas certaines, car les deux derniers chiffres des valeurs de x_n pourraient être entachées d'erreurs, puisque les erreurs d'arrondis que commet la machine se répercutent dans la récurrence.

n	x^n	y_n
245	0,524.999.999.999.999.999.999.7053	0,000.000.000.0236
246	2832	214
247	8889	193
248	4334	175
249	0,525.000.000.000.000.000.000.0118	158

Je remercie le Professeur H. Hadwiger, de l'Université de Berne, des renseignements bibliographiques qu'il m'a communiqués.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLASCHKE, ROTHE u. WEIZENBÖCK, Aufgabe 552, *Arch. Math. Phys.*, Band 27, p. 82, 1917.
[2] W. SÜSS, Eibereiche mit ausgezeichneten Punkten. *Tôhoku, Math. J. II*, Ser. 25, pp. 86-98, 1925.
[3] G. A. DIRAC, Ovals with equicordial points. *J. of the London Math. soc.*, pp. 429-437, 1952.
[4] HELFENSTEIN, Ovals with equicordial points. *J. of the London math. soc.*, p. 54, 1956.
[5] V. LINIS, Ovals with equicordial points. *Amer. math. monthly 64*, pp. 420-422, 1957.
[6] E. WIRSING, Analyzität der Doppelspeichenkurve. *Arch. math. 9*, pp. 300-307, 1958.
[7] Stanley OGILVY, *Les Mathématiques de demain* (librairie Dunod), 1966.

(Reçu le 1er décembre 1966)

E. Ehrhart
11, rue de Bruges
67 Strasbourg