Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN OVALE A DEUX POINTS ISOCORDES ?
Autor: Ehrhart, E.
Kapitel: I
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41534

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Helfenstein [4] a montré qu'il n'existe pas d'ovale à deux points isocordes, si une certaine fonction qui le définit est six fois dérivable aux sommets. Comme d'autre part E. Wirsing [6] a démontré que le bord de l'ovale hypothétique est une courbe analytique (« regulär-analytisch »), sa non-existence serait donc démontrée. Mais Wirsing pense que la preuve d'Helfenstein, qui s'appuie sur une dérivabilité locale, doit contenir une erreur ([6], p. 304). A son avis, l'inexistence de l'ovale doublement isocorde ne peut résulter que d'une considération globale. Le problème est encore cité en 1966 par Stanley Ogilvy parmi les questions ouvertes [7].

Je me propose de ramener le problème géométrique à une question de suite récurrente, d'en déduire l'inexistence de l'ovale doublement isocorde pour une excentricité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, ainsi que pour une liste de valeurs inférieures à $\frac{1}{2}$, et de montrer de cette manière que l'existence de cet ovale est très improbable, quelle que soit l'excentricité.

I

Pour montrer qu'il n'existe pas d'ovale à deux points isocordes, il suffirait d'établir qu'une suite récurrente x_n, que nous allons voir, n'est pas monotone.

Prenons comme unité la longueur commune des isocordes, et donnons nous la distance $OO' = a$. Le milieu I de OO' étant centre de symétrie de l'ovale Ω, les points A, A' de la droite OO' tels que $IA = IA' = \frac{1}{2}$ appartiennent à Ω. Nous les plaçons dans l'ordre A', O, O', A. L'ovale étant symétrique par rapport à la droite OO', un point B, situé sur sa perpendiculaire en O à la distance $\frac{1}{2}$, fait également partie de Ω. Rapportons le plan aux axes Ox, Oy, orientés respectivement par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Soit M_n un point de Ω d'affixe

$$z_n = r_n e^{i\theta n} = x_n + iy_n .$$

L'extrémité M_n' de la corde $M_n M_n' = 1$ menée par O a pour affixe $z_n - e^{i\theta n}$ et le symétrique de M_n' par rapport à I est un point M_{n+1} de Ω [1] d'affixe

$$z_{n+1} = a + e^{i\theta n} - z_n , \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{i}{2} .$$

si on prend B pour point M_0.

---

1) On démontre facilement que le point M_{n+2} coïncide avec l'extrémité P de la corde $M'_n P = 1$ passant par O'.

On en déduit sans peine deux systèmes de récurrence:

$$(I)\quad \begin{cases} 1)\quad x_{n+1} = a + x_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} - 1\right), & x_0 = 0, \\[2ex] 2)\quad y_{n+1} = y_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} - 1\right), & y_0 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(II)\quad \begin{cases} 3)\quad tg\,\theta_{n+1} = \dfrac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n + \dfrac{a}{1-r_n}}, & \theta_0 = \dfrac{\pi}{2}, \\[2ex] 4)\quad r_{n+1}^2 = a^2 + 2a(1-r_n)\cos\theta_n + (1-r_n)^2, & r_0 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Comme $r_n < 1$ pour Ω, on voit par 3) que $\theta_{n+1} < \theta_n$ et par 2) que $y_n > 0$, quel que soit n.

Soit M_n'' le symétrique de M_n par rapport à Ox.

On sait que *Ω n'existe pas si pour un n, $r_{n+1} < r_n$*, car on a vu que $0M$ croît quand M parcourt le bord de A' vers A. *Il en est de même si pour un n, $x_{n+1} < x_n$*, car l'angle $M_n M_{n+1} M_n''$, inscrit dans l'ovale, serait alors rentrant.

Remarque. La suite x_n a un comportement intéressant. Les suites x_{2k} et x_{2k+1} sont toutes les deux croissantes, car $x_n < x_{n+2}$, puisque 1) permet d'écrire

$$x_n + x_{n+1} = a + \cos\theta_n < a + \cos\theta_{n+1} = x_{n+1} + x_{n+2}.$$

Or le calcul électronique montre (du moins pour tous les a traités) qu'à un certain rang n', $x_{n'} > \dfrac{a+1}{2}$. Donc $x_n > \dfrac{a+1}{2}$ pour tous les indices de même parité que n' et supérieurs à lui, et $x_n < \dfrac{a+1}{2}$ pour tous les indices supérieurs à n' et de parité contraire. Les premiers convergent donc vers une valeur $x' > \dfrac{a+1}{2}$ et les seconds vers une valeur $x'' < \dfrac{a+1}{2}$, avec $x' + x'' = a + 1$. Mais le calcul électronique montre que x' et x'' sont très

voisins de $\dfrac{a+1}{2}$ lorsque a est petit. Ainsi, pour $a = 0{,}03$,

$$\frac{1+a}{2} - x_{463} \simeq 14 \cdot 10^{-25}.$$

II

Il n'existe pas d'ovale doublement isocorde d'excentricité supérieure ou égale à ½.

Nous distinguerons deux cas:

1) $a \geqq 0{,}6$. Il suffira de montrer que $r_2^2 < r_1^2$. Puisque

$$r_1^2 = a^2 + 1/4, \qquad \text{et} \qquad r_2^2 = 5/4 - 1/2r_1,$$

cette inégalité se réduit à

$$4a^4 - 7a^2 + 2 < 0, \qquad \text{soit} \qquad (7-\sqrt{17})/8 < a^2 < (7+\sqrt{17})/8.$$

Comme $0 < a < 1$, il faut donc $a > [(7-\sqrt{17})/8]^{-\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{0{,}3598}$, valeur légèrement inférieure à 0,6.

2) $0{,}5 \leqq a \leqq 0{,}6$. Il suffit de montrer que pour ces valeurs

$$x_3 > \frac{a+1}{2}$$

Or,

$$x_2 = 2a(1+4a^2)^{-1/2}, \qquad x_3 = a + x_2((1/r_2)-1)),$$

et l'inégalité à démontrer prend donc la forme

$$f(a) = (5/4-(4a^2+1)^{-1/2})^{-1/2} - 1 - \frac{1-a}{4a}(4a^2+1)^{1/2} > 0.$$

La fonction $f(a)$ est la différence de

$$u(a) = (5/4-(4a^2+1)^{-1/2})^{-1/2} - 1, \qquad v(a) = \frac{1-a}{4a}(4a^2+1)^{1/2},$$

qui sont décroissantes pour $a > 0$. Dans un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, de bornes positives, $f(a)$ est donc minorée par $F(\alpha, \beta) = u(\beta) - v(\alpha)$.

Nous avons alors partagé l'intervalle [0,5; 0,6] en 25 intervalles égaux et déterminé pour chacun $F(\alpha, \beta)$ à l'aide d'un calculateur électronique. Toutes les valeurs obtenues étant positives, $f(a) > 0$ dans [0,5; 0,6].