II

voisins de $\dfrac{a+1}{2}$ lorsque a est petit. Ainsi, pour $a = 0{,}03$,

$$\frac{1+a}{2} - x_{463} \simeq 14 \cdot 10^{-25}.$$

II

Il n'existe pas d'ovale doublement isocorde d'excentricité supérieure ou égale à ½.

Nous distinguerons deux cas:

1) $a \geqq 0{,}6$. Il suffira de montrer que $r_2^2 < r_1^2$. Puisque

$$r_1^2 = a^2 + 1/4, \qquad \text{et} \qquad r_2^2 = 5/4 - 1/2r_1,$$

cette inégalité se réduit à

$$4a^4 - 7a^2 + 2 < 0, \qquad \text{soit} \qquad (7 - \sqrt{17})/8 < a^2 < (7 + \sqrt{17})/8.$$

Comme $0 < a < 1$, il faut donc $a > \left[(7 - \sqrt{17})/8\right]^{-\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{0{,}3598}$, valeur légèrement inférieure à 0,6.

2) $0{,}5 \leqq a \leqq 0{,}6$. Il suffit de montrer que pour ces valeurs

$$x_3 > \frac{a+1}{2}$$

Or,

$$x_2 = 2a\,(1 + 4a^2)^{-1/2}, \qquad x_3 = a + x_2\big((1/r_2) - 1)\big),$$

et l'inégalité à démontrer prend donc la forme

$$f(a) = \big(5/4 - (4a^2 + 1)^{-1/2}\big)^{-1/2} - 1 - \frac{1-a}{4a}(4a^2 + 1)^{1/2} > 0.$$

La fonction $f(a)$ est la différence de

$$u(a) = \big(5/4 - (4a^2 + 1)^{-1/2}\big)^{-1/2} - 1, \qquad v(a) = \frac{1-a}{4a}(4a^2 + 1)^{1/2},$$

qui sont décroissantes pour $a > 0$. Dans un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, de bornes positives, $f(a)$ est donc minorée par $F(\alpha, \beta) = u(\beta) - v(\alpha)$.

Nous avons alors partagé l'intervalle [0,5; 0,6] en 25 intervalles égaux et déterminé pour chacun $F(\alpha, \beta)$ à l'aide d'un calculateur électronique. Toutes les valeurs obtenues étant positives, $f(a) > 0$ dans [0,5; 0,6].