QU'EST-CE QU'UNE QUADRIQUE ?

QU'EST-CE QU'UNE QUADRIQUE ?

Par Pierre SAMUEL (Paris)

Il est d'usage de définir une quadrique comme un *ensemble* de points d'un espace projectif, réel ou complexe. Mais, sauf dans le cas complexe, cet ensemble de points ne détermine pas *l'équation* de la quadrique (à un facteur près, bien entendu): par exemple cet ensemble peut être vide, ou ne comporter que des points singuliers (équations $x^2 + y^2 = 0$ et $x^2 + 3y^2 = 0$ dans l'espace projectif réel). Il est donc incorrect de parler alors de *l'*équation de la quadrique; même N. Bourbaki, dans les exercices de son chapitre IX d'Algèbre, a commis cette erreur.

Cependant, dès que l'ensemble des points d'une quadrique contient un point *simple*, cet ensemble de points détermine l'équation à un facteur près. Pour plus de commodité nous remonterons à un espace vectoriel; nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soient* K *un corps de caractéristique* $\neq 2$, E *un espace vectoriel sur* K, B *et* B′ *deux formes bilinéaires symétriques sur* E, Q *et* Q′ *les formes quadratiques associées* (i.e $\mathrm{Q}(\mathrm{x}) = \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{x})$). *On suppose que les relations* $\mathrm{Q}(\mathrm{x}) = 0$ *et* $\mathrm{Q}'(\mathrm{x}) = 0$ *sont équivalentes, et qu'on dispose d'un point* x_0 *de* E *tel que* $\mathrm{Q}(\mathrm{x}_0) = 0$ *et qu'il existe* $\mathrm{y} \in \mathrm{E}$ *avec* $\mathrm{B}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}) \neq 0$ *(autement dit* x_0 *n'est pas dans le noyau de* B*). Alors les formes* B *et* B′ *sont proportionnelles, de même que* Q *et* Q′.

En effet soit x un point quelconque de E, et soit $a \in K$. Comme $Q(x_0) = Q'(x_0) = 0$, les équations (en a) $Q(ax_0 + x) = 0$ et $Q'(ax_0 + x) = 0$ s'écrivent

$$2a\,B(x_0, x) + Q(x) = 0 \qquad et \qquad 2a\,B'(x_0, x) + Q'(x) = 0\,.$$

et sont équivalentes par hypothèse. En traduisant les propriétés « avoir une solution et une seule » pour les équations (1), on en déduit que les relations $B(x_0, x) \neq 0$ et $B'(x_0, x) \neq 0$ sont équivalentes, donc aussi les relations $B(x_0, x) = 0$ et $B'(x_0, x) = 0$. Ainsi les formes linéaires $x \mapsto B(x_0, x)$ et $x \mapsto B'(x_0, x)$ ont même noyau H; par hypothèse ce noyau H est un hyperplan. Il existe donc, par l'algèbre linéaire, un élément non-nul c de K tel que

$$B'(x_0, x) = cB(x_0, x). \tag{2}$$

D'autre part l'équivalence des équations (1) montre qu'on a $B(x_0, x)\, Q'(x) = B'(x_0, x)\, Q(x)$ pour tout $x \in E$. Il résulte alors de (2) que, *pour* $x \notin H$, on a

$$Q'(x) = cQ(x) \qquad (x \notin H). \tag{3}$$

Or la formule bien connue $2B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ montre que, pour x, y et $x + y \notin H$, on a

$$B'(x, y) = cB(x, y). \tag{4}$$

En changeant y en $-y$, on voit que cette relation est encore vraie pour x, y et $x - y \notin H$. Or, comme K n'est pas de caractéristique 2, si on a $x, y \notin H$, les éléments $x + y$ et $x - y$ ne peuvent être tous deux dans H; donc (4) est vraie pour $x, y \notin H$. Fixons alors $x \in H$, et considérons la forme linéaire $y \mapsto B'(x, y) - cB(x, y)$; on vient de voir qu'elle est nulle en dehors de H; elle est donc partout nulle car tout élément de l'hyperplan H est différence de deux éléments de son complémentaire. Ainsi (4) est vraie pour $x \notin H$ et y quelconque. En intervertissant les rôles de x et de y, le même raisonnement montre que (4) est vraie pour x et y quelconques. Or, c'est ce qu'on voulait démontrer.

Ecole normale supérieure de jeunes filles
Boulevard Jourdan, 48 (Paris, 14e)

(Reçu le 21 avril 1967)