

INTRODUCTION AUX POLYNOMES D'UN NOÉUD

Autor(en): **de Rham, Georges**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41542>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INTRODUCTION AUX POLYNOMES D'UN NŒUD

Par Georges DE RHAM

1. Considérons un nœud, c'est-à-dire une courbe fermée simple C dans l'espace \mathbf{R}^3 , dont la projection C' dans le plan \mathbf{R}^2 n'a pas d'autres points singuliers que n points doubles à tangentes distinctes. Supposons que C et \mathbf{R}^3 sont orientés. Pour fixer les idées, admettons que C coïncide avec sa projection C' sauf au voisinage des points doubles où l'un des arcs passe dessous. Les points de C situés sous les points doubles partagent C en n arcs C_1, C_2, \dots, C_n . Chaque point double est l'extrémité de la projection C'_i d'un arc C_i et l'origine de C'_{i+1} (C'_{n+1} devant être remplacé par C'_1), et il est traversé par un autre arc $C'_{j(i)}$. Convenons de poser $\varepsilon(i) = 1$ si en allant de C'_i à C'_{i+1} on traverse $C'_{j(i)}$ de gauche à droite et $\varepsilon(i) = -1$ dans le cas contraire.

Le groupe fondamental de $\mathbf{R}^3 - C$, qu'on appelle le groupe du nœud, peut être engendré par n éléments a_1, a_2, \dots, a_n , qui satisfont aux n relations

$$(1) \quad \begin{cases} a_i a_{j(i)} = a_{j(i)} a_{i+1} & \text{si } \varepsilon(i) = 1 \\ a_{i+1} a_{j(i)} = a_{j(i)} a_i & \text{si } \varepsilon(i) = -1 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

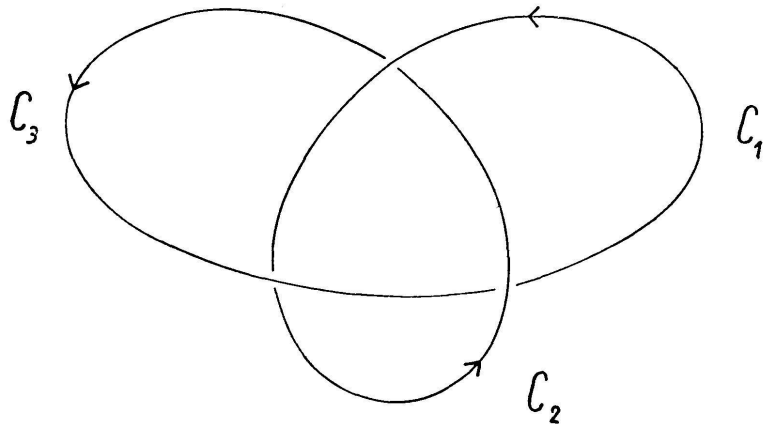
En choisissant pour définir le groupe un point base B situé au-dessus du plan \mathbf{R}^2 , a_i désigne la classe d'homotopie d'un chemin qui, partant de B , traverse \mathbf{R}^2 à gauche de C_i , passe au-dessous de C_i , et retraverse \mathbf{R}^2 à droite de C_i pour revenir en B , sans avoir passé dessous aucun autre arc C_k . A chaque point double correspond une relation (1), dans laquelle chaque membre est la classe d'homotopie d'un chemin qui, partant de B , traverse \mathbf{R}^2 à gauche des arcs de C' passant par ce point double, passe sous les arcs correspondant de C et retraverse \mathbf{R}^2 à droite pour ensuite revenir en B .

Par exemple, pour le nœud de trèfle représenté sur la figure, on a $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \varepsilon(3) = 1$, $j(1) = 3$, $j(2) = 1$, $j(3) = 2$ et aux points doubles correspondent les relations

$$a_2 a_1 = a_1 a_3, \quad a_3 a_2 = a_2 a_1, \quad a_1 a_3 = a_3 a_2.$$

On démontre que ces éléments a_1, a_2, \dots, a_n engendrent le groupe G du nœud, que toutes les relations qu'ils vérifient sont une conséquence des

relations (1) et que l'une quelconque de ces relations est une conséquence des $n-1$ autres (voir par exemple [1]). Partant de là, nous allons définir certains invariants aisément calculables qui se déduisent du groupe G : les *polynômes d'Alexander* ou polynômes du nœud.



2. Nous y serons conduits en cherchant les représentations de G dans le groupe \mathcal{L} des transformations linéaires d'une variable complexe (ou groupe des similitudes du plan). Etant donnés deux nombres complexes x et y , $x \neq 0$, désignons par (x, y) la transformation qui change z en $z' = xz + y$. On a les relations

$$(x, y)^{-1} = (x^{-1}, -x^{-1}y), \quad (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1).$$

Le groupe dérivé \mathcal{L}' ou groupe des commutateurs de \mathcal{L} est le groupe des translations $(1, y)$, le groupe quotient \mathcal{L}/\mathcal{L}' est isomorphe au groupe multiplicatif C^* des nombres complexes $\neq 0$, l'homomorphisme canonique de \mathcal{L} sur C^* envoyant (x, y) sur x .

Soit $h: G \rightarrow \mathcal{L}$ un homomorphisme, $h(a_i) = (x_i, y_i)$. Les relations (1) entraînent immédiatement $x_i = x_{i+1}$, de sorte qu'on peut poser $h(a_i) = (x, y_i)$ et ces relations donnent

$$(2) \quad \begin{cases} (x-1)y_{j(i)} - xy_{i+1} + y_i = 0 & \text{si } \varepsilon(i) = 1 \\ (x-1)y_{j(i)} - xy_i + y_{i+1} = 0 & \text{si } \varepsilon(i) = -1 \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

où naturellement, pour $i = n$, y_{n+1} doit être remplacé par y_1 .

Ce système d'équations linéaires en y_1, y_2, \dots, y_n représente la condition nécessaire et suffisante pour que h soit un homomorphisme.

Quel que soit x , il admet la solution $y_i = c$, constante quelconque indépendante de i , et pour $x = 1$ il n'y en a pas d'autres. Nous pouvons éliminer cette solution en imposant $y_n = 0$, ce qui revient à exiger que

l'origine $z = 0$ soit le point fixe de la transformation $h(a_n)$; si $x \neq 1$, la représentation est toujours conjuguée dans \mathcal{L} à une représentation ayant cette propriété (on peut prendre le point fixe de $h(a_n)$ comme origine !). Nous pouvons aussi supprimer la dernière équation (2), relative à $i = n$, qui est une conséquence des autres, puisque la dernière relation (1) est une conséquence des autres. Il reste alors un système de $(n-1)$ équations linéaires homogènes en y_1, y_2, \dots, y_{n-1} , dont les coefficients dépendent de x et forment une matrice M .

Si ρ est un nombre complexe $\neq 0$, les représentations h pour lesquelles $h(a_n) = \rho$ sont représentées par les vecteurs $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ de \mathbf{C}^{n-1} qui satisfont à ce système où x est remplacé par ρ . Elles forment un sous-espace vectoriel de \mathbf{C}^{n-1} , de dimension $n-1-r(\rho)$, $r(\rho)$ étant le rang de la matrice M pour $x = \rho$.

Cela nous amène à considérer le plus grand commun diviseur $\Delta_k(x)$ des mineurs d'ordre $n-k$ de la matrice M . Ce sont justement les polynômes d'Alexander, ou polynômes du nœud. Et nous avons obtenu la proposition suivante :

Les représentations h de G dans \mathcal{L} pour lesquelles $h(a_n) = (\rho, 0)$ forment un espace vectoriel complexe de dimension égale au plus grand entier k tel que $\Delta_k(\rho) = 0$.

Chacun de ces polynômes est divisible par le suivant. Le premier, le plus intéressant, n'est autre que le déterminant de la matrice M . Notre système d'équation se réduisant pour $x = 1$ à

$$\pm (y_i - y_{i+1}) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad \pm y_{n-1} = 0$$

on voit que $\Delta_1(1) = \pm 1$. Par suite, $\Delta_k(1) = \pm 1$ pour tout $k \leq n-1$. Nous conviendrons de poser, pour $k \geq n$, par définition, $\Delta_k(x) = 1$.

La proposition ci-dessus montre que les racines de ces polynômes sont des invariants du nœud, liés à son groupe G .

D'après la théorie des matrices sur un anneau principal, la matrice M est équivalente, sur l'anneau $\mathcal{Q}(x)$ des polynômes en x à coefficients rationnels, à une matrice diagonale, dans laquelle chacun des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de la diagonale principale divise le suivant (voir par exemple N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. VII, pp. 94-95). On peut obtenir que chaque α_i soit un polynôme en x à coefficients entiers premiers entre eux dans leur ensemble; ils sont alors déterminés au signe près, et l'on a $\Delta_k = \pm \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-k}$. Si α_{n-s} est de degré > 0 et $\alpha_i = 1$ pour $i < n-s$,

en posant

$$\beta_t = \alpha_{n-t} \alpha_{n-t-1}^{-1} \quad (t = 1, 2, \dots, s),$$

on a

$$\alpha_{n-s} = \beta_s, \quad \alpha_{n-s+1} = \beta_{s-1} \beta_s, \dots, \alpha_{n-1} = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s$$

et par suite, au signe près,

$$\Delta_1 = \beta_1 \beta_2^2 \dots \beta_s^s, \quad \Delta_2 = \beta_2 \beta_3^2 \dots \beta_s^{s-1}, \dots, \Delta_s = \beta_s$$

et $\Delta_k = 1$ pour $k > s$. Les Δ_k sont ainsi déterminés par les polynômes β_s .

Pour s'assurer que non seulement les racines des Δ_k sont des invariants du nœud, mais aussi ces polynômes eux-mêmes, il faudrait caractériser l'ordre de multiplicité de ces racines. Si les racines de $\alpha_{n-1} = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s$ sont toutes simples, les relations ci-dessus font connaître ces ordres de multiplicité, et la connaissance des Δ_k n'apporte rien de plus que celle de leurs racines. Cette circonstance se présente dans les exemples traités dans le livre de Richard H. CROWELL et Ralph H. FOX ([1], pp. 124-132).

Mais nous allons reprendre la question d'un point de vue algébrique plus général et montrer que non seulement les polynômes Δ_k , mais les idéaux J_k de l'anneau $\mathbf{Z}[x]$ engendrés par les mineurs d'ordre $n-k$ de la matrice M sont des invariants liés au groupe G .

3. Considérons plus généralement un groupe G tel que G/G' soit cyclique infini, comme pour le groupe d'un nœud, et supposons que l'on ait choisi un générateur x de G/G' (l'autre générateur étant x^{-1}). Soit G'' le groupe dérivé de G' et $\Gamma = G/G''$. Son groupe dérivé $\Gamma' = G'/G''$ est abélien et comme $\Gamma/\Gamma' \simeq G/G'$, nous identifierons Γ/Γ' avec G/G' , de sorte que x sera aussi bien un générateur de Γ/Γ' . Chaque élément γ de Γ induit un automorphisme de Γ' , qui change $c \in \Gamma'$ en $c^\gamma = \gamma c \gamma^{-1}$. Cet automorphisme ne dépend que de la classe de γ (mod Γ'), c'est-à-dire de l'image de γ dans Γ/Γ' , qui est une puissance x^k de x ; cela parce que Γ' est abélien. En utilisant pour Γ' la notation additive, nous désignerons c^γ par $x^k c$. Ainsi $G/G' = \Gamma/\Gamma'$ opère sur Γ' et Γ' se présente comme un module sur l'anneau $A = \mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$. Cet anneau est formé des polynômes en x et x^{-1} à coefficients entiers.

Revenons un instant aux représentations h de G dans \mathcal{L} . Comme \mathcal{L}' est abélien, \mathcal{L}'' est le groupe trivial (réduit à l'élément neutre) et par suite le noyau de tout homomorphisme de G dans \mathcal{L} contient G'' et les représentations de G dans \mathcal{L} se ramènent ainsi aux représentations de Γ . Elles ne peuvent donc nous renseigner que sur la structure de Γ . Les racines

des polynômes Δ_k sont donc des invariants de Γ . Mais en étudiant directement le A -module Γ' , nous allons voir que non seulement les racines, mais ces polynômes eux-mêmes sont des invariants de Γ .

Supposons maintenant que G soit défini par un nombre fini de générateurs a_1, a_2, \dots, a_n et un nombre fini de relations. Nous pouvons aussi supposer que l'image de a_n dans G/G' est précisément le générateur x , car on pourra toujours satisfaire à cette condition en ajoutant un générateur et une relation. Soit x^{ni} l'image de a_i dans G/G' ; alors $b_i = a_i a_n^{-ni}$ est dans G' , et $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, a_n$ est un nouveau système de générateurs de G . Les b_i et tous leurs transformés par toutes les puissances de a_n engendrent G' et les relations de définition de G peuvent s'écrire avec ces éléments seulement. En remplaçant ces éléments par leurs images dans Γ' , désignant par c_i l'image de b_i et, passant à la notation additive, par $x^k c_i$ celle de $a_n^k b_i a_n^{-k}$, on déduit de ces relations un système de la forme:

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} c_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

où les p_{ij} sont des éléments de l'anneau $A = \mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma'] = \mathbf{Z}[x, x^{-1}]$. Les c_i forment une base du A -module Γ' et les relations (3) le définissent complètement.

En multipliant chaque relation (3) par une puissance convenable de x , on peut obtenir que les p_{ij} soient des polynômes en x , ceux d'une même ligne de la matrice ne s'annulant pas tous pour $x = 0$. En remplaçant c_j par $x^{mj} c_j$ et choisissant convenablement m_j , on pourra obtenir aussi que ceux d'une même colonne ne s'annulent pas tous pour $x = 0$.

Dans le cas où G est le groupe d'un nœud défini comme plus haut, cette matrice $P = \|p_{ij}\|$ n'est pas autre chose que la matrice M , comme on le vérifie facilement. Soit $m-1$ l'ordre maximum des mineurs de P non identiquement nuls, J_k l'idéal engendré par les mineurs d'ordre $m-k$ et $\Delta_k(x)$ leur plus grand commun diviseur. Dans le cas de la matrice M , on a $m = n$ et $\Delta_k(x)$ est bien le k -ième polynôme d'Alexander. Or nous allons voir que, dans le cas général, les polynômes $\Delta_k(x)$ et aussi les idéaux J_k sont des invariants du A -module Γ' .

4. Considérons plus généralement un anneau commutatif quelconque A avec élément unité et un A -module de type fini \mathcal{M} . Nous allons définir une suite d'idéaux de A associée à \mathcal{M} , appelée la *chaîne des idéaux élémentaires de \mathcal{M}* ¹⁾.

¹⁾ Comme me signale D. Amiguet, cette question fait l'objet d'un exercice de Bourbaki (*Algèbre commutative*, chap. 7, p. 106) qui nomme ces idéaux *déterminantiels*.

Soit $S = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un système de générateurs de \mathcal{M} , \mathcal{U} un A -module libre de rang n de base $[u_1, u_2, \dots, u_n]$, h l'homomorphisme de \mathcal{U} sur \mathcal{M} tel que $h(u_i) = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) et V le noyau de h , en sorte que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{U}/V$.

Les composantes des éléments v de V relativement à la base $[u_1, u_2, \dots, u_n]$, c'est-à-dire les coefficients x_i des u_i dans l'expression $v = \sum x_i u_i$, engendrent un idéal qui ne dépend pas du choix de la base de \mathcal{U} , car il est engendré par les valeurs sur les éléments de V des formes linéaires sur \mathcal{U} ; désignons-le par $a(\mathcal{U}, V)$.

La puissance extérieure p -ième de \mathcal{U} est un A -module libre \mathcal{U}_p de rang $\binom{n}{p}$, ayant pour base les $\binom{n}{p}$ produits extérieurs $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_p}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$). Les produits extérieurs de p éléments de V engendrent un sous-module V_p de \mathcal{U}_p et leurs composantes engendrent l'idéal $a(\mathcal{U}_p, V_p)$. Il est clair que $a(\mathcal{U}_p, V_p) \supset a(\mathcal{U}_{p+1}, V_{p+1})$, car si $v \in V$ et $w \in V_p$, les composantes de $v \wedge w$ sont des combinaisons linéaires de celles de w .

Ces idéaux étant déterminés à partir du système S , posons $a_p(S) = a(\mathcal{U}_p, V_p)$ pour $1 \leq p \leq n$, et de plus $a_p(S) = (1)$ si $p \leq 0$ et $a_p(S) = (0)$ si $p > n$.

Considérons maintenant le système de générateurs $S' = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ obtenu en adjoignant à S l'élément $a_{n+1} = \sum_1^n y_i a_i$ ($y_i \in A$) et montrons que l'on a $a_{p+1}(S') = a_p(S)$.

Soit \mathcal{U}' le A -module libre de rang $n+1$, ayant pour base $[u_1, \dots, u_n, u_{n+1}]$, en sorte que $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$. L'homomorphisme h s'étend, en posant $h(u_{n+1}) = a_{n+1}$, en un homomorphisme de \mathcal{U}' sur \mathcal{M} . En remplaçant u_{n+1} par $u = u_{n+1} - \sum_1^n y_i u_i$, on a une autre base $[u_1, \dots, u_n, u]$ de \mathcal{U}' et $h(u) = 0$, d'où résulte que le noyau V' de l'homomorphisme h de \mathcal{U}' est engendré par u et V .

Soit encore \mathcal{U}'_p la puissance extérieure p -ième de \mathcal{U}' et V'_p le sous-module de \mathcal{U}'_p engendré par les produits extérieurs de p éléments de V . Tout élément ξ de \mathcal{U}'_{p+1} peut se mettre d'une manière unique sous la forme

$$\xi = \alpha \wedge u + \beta \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathcal{U}_p \quad \text{et} \quad \beta \in \mathcal{U}_{p+1}.$$

Les composantes de ξ sont donc les composantes de α et celles de β . Et chaque couple $\alpha \in \mathcal{U}_p, \beta \in \mathcal{U}_{p+1}$ définit un $\xi \in \mathcal{U}'_{p+1}$. Pour que $\xi \in V'_{p+1}$, il faut et il suffit que $\alpha \in V_p$ et $\beta \in V_{p+1}$. Par suite, l'idéal $a(\mathcal{U}'_{p+1}, V'_{p+1})$ engendré par les composantes des $\xi \in V'_{p+1}$ est identique à l'idéal $a(\mathcal{U}_p, V_p)$ engendré par les composantes des $\alpha \in V_p$ (les composantes des $\beta \in V_{p+1}$ appartenant aussi à cet idéal puisque $a(\mathcal{U}_{p+1}, V_{p+1}) \subset a(\mathcal{U}_p, V_p)$).

Nous avons ainsi prouvé que $a_{p+1}(S') = a_p(S)$. Cela vaut aussi pour $p = 0$, car $u \in V'$ ayant une composante égale à 1, $a_1(S') = (1) = a_0(S)$.

Soit alors \bar{S} un autre système quelconque de générateurs, en nombre m . La proposition établie entraîne $a_{p+m}(S \cup \bar{S}) = a_p(S)$ et $a_{p+n}(S \cup \bar{S}) = a_p(\bar{S})$, d'où $a_p(S) = a_{p+m-n}(\bar{S})$. Nous voyons qu'en changeant le système de générateurs, on obtient la même suite d'idéaux qui est simplement décalée si les nombres de générateurs ne sont pas égaux.

Soit q l'indice du premier idéal $a_p(S)$ égal à (0), de sorte que $a_q(S) = (0)$ et $a_{q-1}(S) \neq 0$. Posons, pour $k \geq 1$, $J_k = a_{q-k}(S)$. La suite croissante d'idéaux de A

$$J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_k \subset J_{k+1} \subset \dots \subset (1)$$

qui se termine par (1) pour un $k \leq n$ ne dépend que du A -module \mathcal{M} : c'est la chaîne des idéaux élémentaires de \mathcal{M} .

Pour déterminer ces idéaux, on prend un ensemble de générateurs v_j ($j = 1, 2, \dots, m$) de V , on les représente à l'aide de la base $[u_1, \dots, u_n]$ de \mathcal{U} ,

$$v_j = \sum_{k=1}^n y_{jk} u_k$$

et l'on considère la matrice des coefficients $\| y_{jk} \|$. Il résulte alors des règles de la multiplication extérieure que $a_p(\mathcal{U}, V)$ est engendré par les mineurs d'ordre p de cette matrice.

5. Il résulte de là que les idéaux J_k définis à la fin du n° 4 sont précisément les idéaux élémentaires du A -module $\Gamma' = G'/G''$, A étant l'anneau $\mathbf{Z}[G/G'] = \mathbf{Z}[x, x^{-1}]$. Ainsi, à tout groupe G tel que G/G' est cyclique infini, est associée une chaîne d'idéaux élémentaires de cet anneau A .

Les unités de A sont les monômes $\pm x^k$ et tout élément $\neq 0$ de A est associé à un polynôme en x qui ne s'annule pas pour $x = 0$, bien déterminé au signe près. On sait que ces polynômes se décomposent d'une manière unique en facteurs irréductibles, déterminés au signe près; les polynômes irréductibles de degré zéro étant les nombres premiers. Par suite, tout ensemble d'éléments de A , en particulier tout idéal, a un plus grand commun diviseur. Ainsi, à la chaîne des idéaux élémentaires J_k est associée une suite de polynômes Δ_k , Δ_k étant le p.g.c.d. des éléments de J_k .

Dans le cas du groupe G d'un nœud, J_1 est l'idéal principal engendré par le déterminant Δ_1 de la matrice M définie au n° 2, et les Δ_k sont les polynômes d'Alexander dont l'invariance est ainsi complètement établie. Mais nous avons aussi prouvé que l'idéal J_k engendré par les mineurs

d'ordre $n-k$ de M sont des invariants. Et cela est important: il existe en effet des nœuds dont les groupes ont les mêmes polynômes Δ_k mais pas les mêmes idéaux J_k . Voir un exemple dans [1], pp. 128-130.

Il faut remarquer que la chaîne des idéaux élémentaires associée à un groupe G n'est bien déterminée que si l'on a choisi un générateur x de G/G' . En remplaçant x par l'autre générateur x^{-1} , ces idéaux sont changés en leurs conjugués par l'automorphisme $x \rightarrow x^{-1}$ de A , et chaque polynôme Δ_k est changé en le polynôme réciproque. Dans le cas du groupe d'un nœud, nous avons lié un générateur x à des orientations de C et de \mathbf{R}^3 . Mais il faut ici mentionner un théorème profond de Seifert: les idéaux associés au groupe d'un nœud sont invariants par la conjugaison $x \rightarrow x^{-1}$, les polynômes Δ_k sont réciproques [2]. Une démonstration particulièrement remarquable de ce théorème est celle de Milnor [3] (voir aussi [4]). Seifert a donné [2] un exemple d'un nœud dont le groupe G est tel que $G' = G''$, pour lequel Γ' est donc trivial, sans que G' le soit. La considération du A -module Γ' ne permet pas de distinguer un tel groupe du groupe cyclique infini. Seifert a alors recours à des représentations dans le groupe des déplacements du plan non-euclidien.

RÉFÉRENCES

- [1] CROWELL, R. H. and R. H. FOX, *Introduction to Knot Theory*. Ginn and Company, 1963.
- [2] SEIFERT, H., Ueber das Geschlecht von Knoten. *Math. Ann.*, vol. 110 (1934), pp. 571-592.
- [3] MILNOR, J., A duality theorem for Reidemeister torsion. *Ann. of Math*, 76 (1962), pp. 136-147.
- [4] DE RHAM, G., S. MAUMARY et M. A. KERVAIRE, *Torsion et type simple d'homotopie*. Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., Nr. 48.
- [5] REIDEMEISTER, K., Knotentheorie, dans *Ergebnisse der Math.*, vol. 1, n° 1 (1932). Reprint Chelsea, 1948, New-York.
- [6] NEUWIRTH, L. P., Knot Groups. *Annals of Math. Studies*, Nr. 56. Princeton Univ. Press, 1965.

G. de Rham
Institut de Mathématiques
Université de Genève

(Reçu le 13 février 1968)