SUR LES BORNES DE CERTAINES FONCTIONS ET SUR LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE

Autor(en): **Stavroulakis, Nikias**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41543

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LES BORNES DE CERTAINES FONCTIONS ET SUR LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE

Par Nikias STAVROULAKIS

I. INTRODUCTION

Soit $f\colon U \to \bar{R}$, $\bar{R}$ étant la droite achevée, une fonction numérique *continue* sur un ouvert U de R^n, et $E \subset U$ l'ensemble maximal, supposé non vide, possédant la propriété suivante: $\forall x \in E$, toutes les dérivées premières de f existent en x. Soit E_0 le complémentaire de E dans U et $E_1 \subset E$ l'ensemble maximal satisfaisant à la propriété suivante: $\forall x \in E_1$, toutes les dérivées premières de f s'annulent en x.

PROPOSITION. *En désignant par* F *la frontière de* U *dans* $\bar{R}^n$ *et par* L (F) *l'ensemble des valeurs limites de* f *aux points de* F, *les bornes de* f *s'obtiennent par les formules*

$$\sup f = \sup\big(f(E_0) \cup f(E_1) \cup \{\sup L(F)\}\big),$$
$$\inf f = \inf\big(f(E_0) \cup f(E_1) \cup \{\inf L(F)\}\big) \qquad (I.1)$$

ou par les formules équivalentes

$$\sup f = \sup\big(f(E_0) \cup f(E_1) \cup \overline{L(F)}\big),$$
$$\inf f = \inf\big(f(E_0) \cup f(E_1) \cup \underline{L(F)}\big)$$

où $\overline{\mathrm{L}(\mathrm{F})}$, $\underline{\mathrm{L}(\mathrm{F})}$ *sont respectivement les ensembles des limites supérieures et inférieures de* f *aux points de* F.

Démonstration. Bornons-nous à la démonstration de la première formule. Pour $x \in \bar{U} = U \cup F$, désignons par L_x l'ensemble des valeurs limites de f au point x. Alors

$$\sup f = \sup f(U) = \sup\big(f(U) \cup (\bigcup_{x \in \bar{U}} L_x)\big).$$

Comme $L_x = \{f(x)\}$, $\forall x \in U$, en vertu de la continuité, il s'ensuit

$$f(U) \cup (\bigcup_{x \in \bar{U}} L_x) = f(U) \cup L(F) = f(E_0) \cup f(E) \cup L(F).$$

L'ensemble $f(U) \cup L(F)$ étant fermé, il contient la valeur sup f; donc on ne modifie pas le sup $(f(U) \cup L(F))$ en retranchant de cet ensemble toute valeur inférieure à sup f. Il en est ainsi en particulier des valeurs $f(x)$ pour $x \in E$, $x \notin E_1$, puisque $f(x) = \sup f$, $x \in E \Rightarrow x \in E_1$, et aussi des valeurs inférieures à sup $L(F)$, d'où le résultat.

Les formules (I. 1) permettent souvent le calcul des sup f, inf f, sans aucune hypothèse concernant les dérivées secondes. Leur extension au cas où U est un ouvert d'une variété C^1 est immédiate, mais, pour éviter les complications, f doit alors être supposée différentiable en tout point de E; on peut d'ailleurs les compléter d'une façon évidente lorsque f présente des discontinuités dans E_0.

II. Détermination du minimum de certaines fonctions convexes

Dans l'espace R^n, muni de la distance euclidienne, on se donne q points $a_1, a_2, \ldots, a_q$ tels que R^n soit le plus petit espace linéaire qui les contient. Nous allons considérer des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \, | x - a_i |^{\nu_i}$$

où μ_i, ν_i sont des nombres réels tels que $\mu_i > 0$, $\nu_i \geqq 1$, $(i = 1, 2, \ldots, q)$. Dans le cas trivial où $n = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_q = 1$, on a

$$\inf f = \inf \{ f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_q) \},$$

parce que le graphe de f est alors une ligne brisée convexe de sommets $(a_i, f(a_i))$, $(i = 1, 2, \ldots, q)$; si cette ligne possède un côté parallèle à l'axe des x, la fonction f n'est pas strictement convexe.

Proposition. *Le cas trivial ci-dessus étant écarté,* f *est toujours strictement convexe et l'équation* df $= 0$ *admet une ou n'admet aucune solution.*

Si df $= 0$ *pour* x $=$ x$_0$, *le point* x$_0$ *appartient à l'intérieur* $\overset{\circ}{\mathrm{T}}$ *de l'enveloppe convexe* T *des* a$_1$, a$_2$, ..., a$_q$ *et fournit le minimum. Si l'équation* df $= 0$ *n'a pas de solution, on aura* inf f $= \inf \{ \mathrm{f}(\mathrm{a}_i) \mid \nu_i = 1 \}$, *ce qui montre en particulier que la solution* x$_0$ *existe quand* $\nu_i > 1$ *pour* i $= 1, 2, \ldots,$ q.

Démonstration. La fonction $| x |^{\nu}$, où $\nu \geqq 1$, étant convexe, il en est de même des $\mu_i \, | x - a_i |^{\nu_i}$ et de leur somme $f(x)$. La fonction $| x |^{\nu}$, où $\nu > 1$, étant strictement convexe, il s'ensuit la même propriété pour f lorsqu'il existe un indice tel que $\nu_i > 1$. Lorsque $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_q = 1$, alors $n \geqq 2$; donc, $\forall x \in R^n$, $\forall x' \in R^n$, on aura $| \alpha x + (1 - \alpha) x' - a_i | =$

$= | \alpha (x - a_i) + (1 - \alpha)(x' - a_i) | < \alpha | x - a_i | + (1 - \alpha) | x' - a_i |$, $(0 < \alpha < 1)$, pour un indice au moins, d'où le résultat dans ce cas aussi.

Comme f est strictement convexe, $df = 0$ admet au plus une solution.

La relation

$$df = \Big(\sum_{i=1}^{q} \mu_i \nu_i \, | x - a_i |^{\nu_i - 2} (x - a_i)\Big) dx$$

entraîne $E_0 = \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$. Si $df = 0$ pour $x = x_0$, on a $x_0 \notin \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$, $E_1 = \{ x_0 \}$, d'où, d'après (I. 1), $\inf f = \inf (\{ f(a_i) \mid \nu_i = 1 \} \cup \{ f(x_0) \})$; considérant la restriction de f à la ligne droite joignant x_0 à un point a_i tel que $\nu_i = 1$, on constate que $f(x_0) < f(a_i)$, d'où $\inf f = f(x_0)$. Si $df(x) \neq 0$, $\forall x \notin \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$, on a $E_1 = \varnothing$ et $\inf f = \inf f(E_0) = \inf \{ f(a_i) \mid \nu_i = 1 \}$.

Si $df = 0$ pour $x = x_0$ et si $x_0 \notin \mathring{T}$, il existera un $(n - 1)$ – plan H tel que $x_0 \in H$, $H \cap \mathring{T} = \varnothing$. Soit e le vecteur unitaire normal à H définissant le demi-espace défini par H contenant $\mathring{T}$. Alors la dérivée de f en x_0 dans la direction de e,

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \nu_i \, | x_0 - a_i |^{\nu_i - 2} (x_0 - a_i) e ,$$

sera négative non nulle, ce qui est impossible; donc $x_0 \in \mathring{T}$.

Corollaire. *Lorsque* $\inf \{ \mathrm{f}(\mathrm{a}_i) \mid \nu_i = 1 \}$ *se réalise en deux points de* $\mathrm{E}_0 = \{ \mathrm{a}_i \mid \nu_i = 1 \}$, *alors* $\mathrm{df} = 0$ *admet une solution* x_0. *Lorsque* $\inf \{ \mathrm{f}(\mathrm{a}_i) \mid \nu_i = 1 \}$ *se réalise en un seul point* a_k, *alors la solution* x_0 *de* $\mathrm{df} = 0$ *existe si, et seulement si, dans une boule de centre* a_k *et de rayon arbitrairement petit, il existe un point* x *tel que* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) < \mathrm{f}(\mathrm{a}_k)$.

Quand la solution x_0 existe, on peut la déterminer, par rapport à des coordonnées rectangulaires $(x^1, ..., x^n)$, en limitant ses opérations dans le domaine $\mathring{T}$. Posant

$$f_s = \frac{\partial f}{\partial x^s}, \quad (s = 1, 2, \ldots, n) ,$$

on voit que l'équation $f_1 = 0$ admet une solution $x^1 = \varphi^1 (x^2, ..., x^n)$ unique et telle que $(\varphi^1 (x^2, ..., x^n), x^2, ..., x^n) \notin \{ a_i \mid \nu_i = 1 \}$; l'équation $f_2 (\varphi^1 (x^2, ..., x^n), x^2, ..., x^n) = 0$ admet aussi une solution unique $x^2 = \varphi^2 (x^3, ..., x^n)$ et il en est de même de $f_3 (\varphi^1, \varphi^2, x^3, ..., x^n) = 0$, etc... L'équation $f_n (\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^{n-1}, x^n) = 0$ fournit finalement la coordonnée x_o^n et, remplaçant successivement dans $\varphi^{n-1}, ..., \varphi^2, \varphi^1$, on obtient aussi les autres coordonnées $x_o^{n-1}, ..., x_0^2, x_0^1$ de x_0.

Suivant les données concrètes du problème, la recherche de x_0 peut être simplifiée, notamment si $v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$, cas dans lequel $df = 0$ s'écrit

$$\sum_1^q \mu_i v_i = 0 \qquad \text{où} \qquad v_i = -\frac{x - a_i}{|x - a_i|}.$$

Lorsque, par exemple, $n = 2$, $q = 3$, $v_1 = v_2 = v_3 = 1$, la condition

$$\sum_1^3 \mu_i v_i = 0$$

ne peut être vraie que si $\mu_1 + \mu_2 > \mu_3$, $|\mu_1 - \mu_2| < \mu_3$; donc quand ces relations ne sont pas remplies, on a $\inf f = \inf \{f(a_1), f(a_2), f(a_3)\}$. Si elles sont remplies, on considère les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ d'un triangle $A_1 A_2 A_3$ tel que $|\overrightarrow{A_2 A_3}| = \mu_1$, $|\overrightarrow{A_3 A_1}| = \mu_2$, $|\overrightarrow{A_1, A_2}| = \mu_3$; alors, si les angles $\pi - \hat{A}_1, \pi - \hat{A}_2, \pi - \hat{A}_3$ sont supérieurs respectivement aux angles $\sphericalangle (a_2 a_1 a_3)$, $\sphericalangle (a_3 a_2 a_1)$, $\sphericalangle (a_1 a_3 a_2)$, le point x_0 existe et, compte tenu des $\sphericalangle (a_2 x_0 a_3) = \pi - \hat{A}_1$, $\sphericalangle (a_3 x_0 a_1) = \pi - \hat{A}_2$, $\sphericalangle (a_1 x_0 a_2) = \pi - \hat{A}_3$, se détermine facilement; en cas contraire, on a encore $\inf f = \inf \{f(a_1), f(a_2), f(a_3)\}$.

III. Sur les relations métriques dans un simplexe

Etant donné un simplexe euclidien $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$, on désigne par $\vec{x}_{ij}$ le vecteur $\overrightarrow{A_i A_j}$, ce qui entraîne $|\vec{x}_{ij}| = |\vec{x}_{ji}| = x_{ij} = x_{ji}$, $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \dots, n+1)$, et par ω le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{x}_{i1}, \vec{x}_{i2}, \dots, \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_{i,n+1}}$, issus de A_i. Ce volume, qui ne dépend pas du sommet choisi, permet d'associer à chaque sommet A_i un angle ϕ_i défini par les conditions suivantes:

a) $\sin \phi_i = \tau_i = \dfrac{\omega}{x_{i1}\, x_{i2} \dots x_{i,i-1}\, x_{i,i+1} \dots x_{i,n+1}}$;

b) $0 < \phi_i < \dfrac{\pi}{2}$, lorsque parmi les angles que font les vecteurs $\vec{x}_{i1}, \vec{x}_{i2}, \dots, \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_{i,n+1}}$, pris deux à deux, il y en a au moins un inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} \leqq \phi_i < \pi$ en cas contraire.

Alors l'un au plus des ϕ_i peut être supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. On pose le problème de préciser les propriétés caractéristiques de la somme $\sum_{i=1}^{n+1} \phi_i$ qui, dans les cas où $n = 1$ et $n = 2$, se réduit à la constante π.

Cas du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$

Nous introduirons souvent dans une même expression ou relation les indices i, j, k, l; il sera alors sous-entendu que (i, j, k, l) est une permutation de $(1, 2, 3, 4)$.

Désignant par $\sigma = \sigma(\{x_{ij}^2\})$ la forme ω^2 qui est donnée par

$$\begin{aligned} 4\sigma = 4\omega^2 = {} & x_{12}^2 x_{34}^2 (x_{13}^2 + x_{24}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{12}^2 - x_{34}^2) \\ & + x_{13}^2 x_{24}^2 (x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{13}^2 - x_{24}^2) \\ & + x_{14}^2 x_{23}^2 (x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{13}^2 + x_{24}^2 - x_{14}^2 - x_{23}^2) \\ & - x_{12}^2 x_{13}^2 x_{23}^2 - x_{12}^2 x_{14}^2 x_{24}^2 - x_{13}^2 x_{14}^2 x_{34}^2 - x_{23}^2 x_{24}^2 x_{34}^2 \end{aligned} \tag{III.1}$$

on voit que, les x_{ij} étant rangés dans un ordre déterminé, les fonctions $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ sont définies sur l'ouvert connexe

$$U : (\sigma(\{x_{ij}^2\}) > 0, \ |x_{12}^2 + x_{13}^2 - x_{23}^2| < 2x_{12} x_{13}, \ 0 < x_{ij} < +\infty, \ i \neq j; \\ i, j = 1, 2, 3, 4)$$

de R^6 où sont aussi définis les tétraèdres. Identifions chaque point $X \in U$ au tétraèdre correspondant $A_i A_j A_k A_l$. La frontière F de U dans $\bar{R}^6$ donne lieu à des tétraèdres dégénérés parmi lesquels on distingue *a)* les figures planes X_{d1} obtenues pour des valeurs finies et non nulles des x_{ij}, *b)* les tétraèdres dégénérés X_{d2} de la forme $A_i A_j A_k A_l^\infty$, A_l^∞ désignant un sommet éloigné à l'infini, *c)* les tétraèdres dégénérés X_{d3} de la forme $A_i A_j A_k^\infty A_l^\infty$.

Proposition 1. *Désignant par* s_i *une valeur limite de* τ_i *sur* F, *l'ensemble des systèmes de valeurs* (s_i, s_j, s_k, s_l) *qui ne sont pas de la forme* $(\tau_i, \tau_j, \tau_k, \tau_l)$, *s'obtient en nous bornant aux tétraèdres dégénérés* X_{d1}, X_{d2}, X_{d3}. *En particulier, on a sur* X_{d1}:

$$(s_i, s_j, s_k, s_l) = (0, 0, 0, 0)$$

sur X_{d2}:

$$(s_i, s_j, s_k, s_l) = (\sin\alpha_i \sin\psi, \sin\alpha_j \sin\psi, \sin\alpha_k \sin\psi, 0)$$

avec

$$0 \leqq \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k \leqq \pi\,, \quad \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k = \pi\,, \quad 0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2},$$

sur X_{d3}:

$$\begin{aligned}(s_i, s_j, s_k, s_l) &= (\sin\alpha_i \sin\psi, \sin\alpha_j \sin\psi, 0, 0)\\ &= (\sin\alpha_i \sin\psi, \sin\alpha_i \sin\psi, 0, 0)\end{aligned}$$

avec

$$0 \leqq \alpha_i, \alpha_j \leqq \pi\,, \quad \alpha_i + \alpha_j = \pi\,, \quad 0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

PROPOSITION *2. Soient* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ *quatre points distincts dans un espace euclidien* R^n *et désignons par* $\varphi_{(ij)(kl)}$ *l'angle aigu (ou droit) des directions définies par* $\mathrm{A}_i\,\mathrm{A}_j$ *et* $\mathrm{A}_k\,\mathrm{A}_l$. *Alors les relations*

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)}$$

entraînent nécessairement

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = 0\,.$$

Démonstration. Comme

$$2x_{ij}\,x_{kl}\cos\varphi_{(ij)(kl)} = 2\,|\vec{x}_{ij}\,\vec{x}_{kl}| = |x_{il}^2 + x_{jk}^2 - x_{ik}^2 - x_{jl}^2|\,,$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}\frac{|x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{13}^2 - x_{24}^2|}{x_{12}\,x_{34}} &= \frac{|x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{12}^2 - x_{34}^2|}{x_{13}\,x_{24}}\\ &= \frac{|x_{13}^2 + x_{24}^2 - x_{22}^2 - x_{34}^2|}{x_{14}\,x_{23}}\,.\end{aligned}$$

Ces relations sont d'abord remplies lorsque

$$x_{12}^2 + x_{34}^2 = x_{13}^2 + x_{24}^2 = x_{14}^2 + x_{23}^2 = \lambda^2\,, \tag{III.2}$$

λ étant une longueur convenable, et alors

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = \frac{\pi}{2}.$$

En cas contraire, on peut supposer $x_{14}^2 + x_{23}^2 > x_{13}^2 + x_{24}^2 > x_{12}^2 + x_{34}^2$, ce qui donne

$$x_{13} x_{24} = x_{12} x_{34} + x_{14} x_{23}, \qquad (III.3)$$

$$x_{13} x_{24} (x_{13}^2 + x_{24}^2) = x_{12} x_{34} (x_{12}^2 + x_{34}^2) + x_{14} x_{23} (x_{14}^2 + x_{23}^2). \qquad (III.4)$$

Il en résulte

$$x_{12}^2 x_{34}^2 (x_{13}^2 + x_{24}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{12}^2 - x_{34}^2) = x_{12} x_{34} \big(x_{13} x_{24} (x_{14}^2 + x_{23}^2) - x_{14} x_{23} (x_{13}^2 + x_{24}^2) \big),$$

$$x_{13}^2 x_{24}^2 (x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{13}^2 - x_{24}^2) = x_{13} x_{24} \big(x_{14} x_{23} (x_{12}^2 + x_{34}^2) + x_{12} x_{34} (x_{14}^2 + x_{23}^2) \big),$$

$$x_{14}^2 x_{23}^2 (x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{13}^2 + x_{24}^2 - x_{14}^2 - x_{23}^2) = x_{14} x_{23} \big(x_{13} x_{24} (x_{12}^2 + x_{34}^2) - x_{12} x_{34} (x_{13}^2 + x_{24}^2) \big).$$

Remplaçant dans (III. 1) on trouve

$$\sigma(\{ x_{ij}^2 \}) = -(x_{12} x_{13} x_{23} + x_{13} x_{14} x_{34} - x_{12} x_{14} x_{24} - x_{23} x_{24} x_{34})^2.$$

Comme $\sigma(\{ x_{ij}^2 \}) > 0$, $\forall X \in U$, il reste à voir s'il existe des X_{d1} tels que

$$x_{13} (x_{12} x_{23} + x_{14} x_{34}) = x_{24} (x_{12} x_{14} + x_{23} x_{34}). \qquad (III.5)$$

Remplaçant les valeurs des x_{13}, x_{24}, tirées des (III. 3), (III. 5), dans (III. 4) on obtient $(x_{14} - x_{23})^2 = (x_{12} + x_{34})^2$, ce qui donne $x_{14} = x_{12} + x_{23} + x_{34}$ ou $x_{23} = x_{21} + x_{14} + x_{43}$. Les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont donc alignés et $\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = 0$.

Tout tétraèdre satisfaisant à (III. 2) sera dit *normal*. On considère aussi des tétraèdres normaux dégénérés X_{d1}, X_{d2}, X_{d3} résultant des déformations continues des tétraèdres normaux.

COROLLAIRE. *Pour qu'un tétraèdre soit normal il faut et il suffit que*

$$x_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x_{12}} + x_{34} \frac{\partial \omega}{\partial x_{34}} = x_{13} \frac{\partial \omega}{\partial x_{13}} + x_{24} \frac{\partial \omega}{\partial x_{24}} = x_{14} \frac{\partial \omega}{\partial x_{14}} + x_{23} \frac{\partial \omega}{\partial x_{23}},$$

ou, en vertu du théorème d'Euler,

$$x_{12}\frac{\partial\omega}{\partial x_{12}} + x_{34}\frac{\partial\omega}{\partial x_{34}} = \omega\,, \qquad x_{13}\frac{\partial\omega}{\partial x_{13}} + x_{24}\frac{\partial\omega}{\partial x_{24}} = \omega \qquad (III.6)$$

ou encore, en posant $y_{ij} = x_{ij}^2, \quad \sigma = \sigma(\{y_{ij}\})$,

$$y_{12}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{12}} + y_{34}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{34}} = \sigma\,, \qquad y_{13}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{13}} + y_{24}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{24}} = \sigma\,. \qquad (III.7)$$

PROPOSITION 3. *La relation* $\sum_{i=1}^{4} \phi_i = \pi$ *est valable pour tout tétraèdre normal.*

Démonstration. En vertu de (III. 2), on peut associer à chaque sommet A_i d'un tétraèdre normal le paramètre y_i défini par les relations

$$\begin{aligned} 2\vec{x}_{ij}\,\vec{x}_{ik} = 2\vec{x}_{ik}\,\vec{x}_{il} = 2\vec{x}_{il}\,\vec{x}_{ij} &= x_{ij}^2 + x_{ik}^2 - x_{jk}^2 \\ &= x_{ik}^2 + x_{il}^2 - x_{kl}^2 = x_{il}^2 + x_{ij}^2 - x_{lj}^2 = 2y_i\,, \qquad (III.8) \end{aligned}$$

d'où

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \lambda^2\,,\ \ x_{ij}^2 = y_{ij} = y_i + y_j\,,\ \ (i \neq j;\, i,j = 1,2,3,4)\,. \qquad (III.9)$$

Remplaçant dans l'expression de $\frac{\partial\sigma}{\partial y_{ij}}$ on trouve $\frac{\partial\sigma}{\partial y_{ij}} = y_k\,y_l$ et ensuite, moyennant (III. 7),

$$\sigma = y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_3 y_4 + y_2 y_3 y_4\,. \qquad (III.10)$$

Comme d'ailleurs

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_{ij}^2 & y_i & y_i \\ y_i & x_{ik}^2 & y_i \\ y_i & y_i & x_{il}^2 \end{vmatrix} = x_{ij}^2\,x_{ik}^2\,x_{il}^2 - \lambda^2\,y_i^2\,,$$

on en déduit

$$\cos^2\phi_i = 1 - \sin^2\phi_i = 1 - \frac{\sigma}{x_{ij}^2\,x_{ik}^2\,x_{il}^2} = \frac{\lambda^2\,y_i^2}{x_{ij}^2\,x_{ik}^2\,x_{il}^2}\,.$$

Désignant par ψ_{ij} l'angle des vecteurs $\overrightarrow{x_{ik}}, \overrightarrow{x_{il}}$, il s'ensuit, d'après (III. 8), que les $\psi_{ij}, \psi_{ik}, \psi_{il}$ sont tout ensemble inférieurs, égaux ou supérieurs à $\frac{\pi}{2}$ suivant que $y_i > 0$, $y_i = 0$ ou $y_i < 0$. Selon la définition de ϕ_i, on a donc respectivement

$$\phi_i < \frac{\pi}{2}, \quad \phi_i = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \phi_i > \frac{\pi}{2},$$

et cela prouve que

$$\cos \phi_i = \frac{\lambda y_i}{x_{ij}\, x_{ik}\, x_{il}} .$$

Remplaçant les $\sin \phi_i$, $\cos \phi_i$ dans l'identité

$$\sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) =$$
$$\sum \sin \phi_i \cos \phi_j \cos \phi_k \cos \phi_l - \sum \cos \phi_i \sin \phi_j \sin \phi_k \sin \phi_l$$

et tenant compte des (III. 9), (III. 10), on obtient

$$\sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) = \frac{\lambda \sqrt{\sigma}}{y_{12}\, y_{13}\, y_{14}\, y_{23}\, y_{24}\, y_{34}}$$
$$\left((y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_3 y_4 + y_2 y_3 y_4)\lambda^2 - (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\sigma\right) = 0 .$$

Comme d'ailleurs $0 < \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 < 2\pi$, il s'ensuit

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \pi .$$

COROLLAIRE. *Si* $\phi_i > 0$, (i = 1, 2, 3, 4), *et* $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \pi$, *il existe une infinité de tétraèdres normaux tels que* $\tau_i = \sin \phi_i$, (i = 1, 2, 3, 4). *Leurs arêtes sont données par les formules*

$$x_{ij} = x_{ji} = k \sqrt{ctg\, \phi_i + ctg\, \phi_j} ,$$

k *étant une longueur arbitraire.*

La relation $\sum_{1}^{4} \phi_i = \pi$ s'étend immédiatement aux tétraèdres normaux dégénérés X_{d1}, X_{d2}, X_{d3}. Il n'en est pas de même pour tous les autres X_{d1}, X_{d2}, X_{d3}. Si un X_{d1}, par exemple, est tel que

$$\psi_{12} = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_{13} > \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_{14} > \frac{\pi}{2},$$

la somme $\sum_1^4 \phi_i$, calculée sur les X qui ont pour limite X_{d1}, aura deux valeurs limites, 0 et π.

Détermination des bornes d'une fonction numérique $f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ par application des formules (I. 1). La forme de f est supposée telle que $f(u_1, u_2, u_3, u_4)$ soit continue sur un ouvert de R^4 contenant le cube $0 \leqq u_i \leqq 1$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. L'ensemble $E_0 \subset U$, donc aussi $E \subset U$, s'obtient par l'intermédiaire de l'ensemble des points de R^4 où les dérivées de $f(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ne sont pas définies.

En ce qui concerne la détermination de E_1, on peut se limiter à la considération de l'ensemble $E \cap H$, H étant un hyperplan $(x_{23} = c_{23} > 0)$, puisque f est homogène de degré zéro. Etant donné que

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} = -\frac{1}{x_{ij}}\left(\tau_i \frac{\partial f}{\partial \tau_i} + \tau_j \frac{\partial f}{\partial \tau_j}\right) + \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x_{ij}}\left(\sum_1^4 \tau_q \frac{\partial f}{\partial \tau_q}\right),$$

on obtient la relation

$$\left(x_{12}\frac{\partial f}{\partial x_{12}} + x_{34}\frac{\partial f}{\partial x_{34}}\right)\omega = \left(x_{12}\frac{\partial \omega}{\partial x_{12}} + x_{34}\frac{\partial \omega}{\partial x_{34}} - \omega\right)\left(\sum_1^4 \tau_q \frac{\partial f}{\partial \tau_q}\right)$$

et les deux autres qui s'en déduisent par permutation d'indices. Par conséquent les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_{12}} = \frac{\partial f}{\partial x_{34}} = \frac{\partial f}{\partial x_{13}} = \frac{\partial f}{\partial x_{24}} = \frac{\partial f}{\partial x_{14}} = 0$$

sont d'abord remplies sur l'ensemble $E_1' \subset E \cap H$ défini par

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_1} = \frac{\partial f}{\partial \tau_2} = \frac{\partial f}{\partial \tau_3} = \frac{\partial f}{\partial \tau_4} = 0,$$

puis sur un ensemble $E_1'' \subset E \cap H$ tel que tout $X \in E_1''$ satisfasse aux (III. 6) et soit donc normal. Ainsi $E_1 = E_1' \cup E_1''$ et $f(E_1) = f(E_1') \cup f(E_1'')$. Etant donné qu'en tout $X \in E_1''$ la valeur de f est de la forme

$$f(\sin\phi_1, \sin\phi_2, \sin\phi_3, \sin\phi_4) = g(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \quad \text{avec} \quad \sum_1^4 \phi_i = \pi,$$

suivant la proposition 3, on peut éviter la détermination de E_1'' en lui substituant le problème, plus facile en général, de la détermination des bornes de $g(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ sous les conditions

$$0 < \phi_i < \pi, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \sum_1^4 \phi_i = \pi.$$

En ce qui concerne le calcul des $\sup L'(F)$, $\inf L'(F)$, où $L'(F)$ est l'ensemble des valeurs limites qui ne sont pas de la forme $f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, on voit, compte tenu de la proposition 1, que *a)* les X_{d1} donnent la seule valeur $f(0, 0, 0, 0)$, *b)* les X_{d2} donnent les fonctions

$$f(\sin\alpha_1 \sin\psi, \sin\alpha_2 \sin\psi, \sin\alpha_3 \sin\psi, 0),$$
$$f(\sin\alpha_1 \sin\psi, \sin\alpha_2 \sin\psi, 0, \sin\alpha_3 \sin\psi),$$
$$f(\sin\alpha_1 \sin\psi, 0, \sin\alpha_2 \sin\psi, \sin\alpha_3 \sin\psi),$$
$$f(0, \sin\alpha_1 \sin\psi, \sin\alpha_2 \sin\psi, \sin\alpha_3 \sin\psi),$$
$$\left(0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < \pi, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi, \quad 0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

dont les bornes s'obtiennent moyennant les formules (I. 1), *c)* les X_{d3} donnent les fonctions

$$f(\sin\alpha \sin\psi, \sin\alpha \sin\psi, 0, 0), \quad f(\sin\alpha \sin\psi, 0, \sin\alpha \sin\psi, 0),$$
$$f(\sin\alpha \sin\psi, 0, 0, \sin\alpha \sin\psi), \quad f(0, \sin\alpha \sin\psi, \sin\alpha \sin\psi, 0),$$
$$f(0, \sin\alpha \sin\psi, 0, \sin\alpha \sin\psi), \quad f(0, 0, \sin\alpha \sin\psi, \sin\alpha \sin\psi),$$
$$\left(0 < \alpha < \pi, 0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

dont les bornes s'obtiennent également par la méthode générale.

Ayant obtenu les $\sup L'(F)$, $\inf L'(F)$, on a

$$\sup f = \sup\left(f(E_0) \cup f(E_1') \cup \{\sup g, \sup L'(F)\}\right),$$
$$\inf f = \inf\left(f(E_0) \cup f(E_1') \cup \{\inf g, \inf L'(F)\}\right).$$

Si l'on désigne par $\arcsin \tau_i$ le plus petit arc positif ayant le sinus τ_i, la démonstration des propositions suivantes est maintenant immédiate.

PROPOSITION 4. *La fonction* $\sum_1^4 \arcsin \tau_i$ *vérifie les relations*

$$0 \leqq \sum_1^4 \arcsin \tau_i \leqq \pi .$$

La borne supérieure π *s'obtient* a) *sur tout tétraèdre normal pour lequel l'un des* ϕ_i *est égal à* $\frac{\pi}{2}$, b) *sur tout tétraèdre normal pour lequel* $\phi_i < \frac{\pi}{2}$, (i = 1, 2, 3, 4), c) *sur tout tétraèdre normal dégénéré* X_{d2}, $A_i A_j A_k A_l^\infty$, *dont* *la face* $A_i A_j A_k$ *n'a aucun angle supérieur à* $\frac{\pi}{2}$, d) *sur tout tétraèdre normal dégénéré* X_{d3}, $A_i A_j A_k^\infty A_l^\infty$, *tel que* $\phi_i = \phi_j = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, pour tout tétraèdre qui n'est pas normal, on a

$$\sum_1^4 \operatorname{arc} \sin \tau_i < \pi .$$

Proposition 5. *La fonction*

$$- \operatorname{arc} \sin \tau_4 + \sum_1^3 \operatorname{arc} \sin \tau_i$$

vérifie les relations

$$0 \leqq - \operatorname{arc} \sin \tau_4 + \sum_1^3 \operatorname{arc} \sin \tau_i \leqq \pi .$$

La borne inférieure 0 *s'obtient* a) *sur tout tétraèdre normal pour lequel* $\phi_4 \geqq \frac{\pi}{2}$, b) *sur tout* X_{d1} *et sur toute autre forme dégénérée pour laquelle* $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$, c) *sur tout tétraèdre normal dégénéré* $A_4 A_i A_j A_k^\infty$ *tel que* $\psi_{4k} \geqq \frac{\pi}{2}$, d) *sur tout* X_{d3} *de la forme* $A_4 A_i A_j^\infty A_k^\infty$.

Par conséquent, pour tout tétraèdre qui n'est pas normal, on a

$$- \operatorname{arc} \sin \tau_4 + \sum_1^3 \operatorname{arc} \sin \tau_i > 0 .$$

Théorème. *Pour qu'un tétraèdre soit normal, il faut et il suffit que la relation* $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ *soit valable.*

Démonstration. Si le tétraèdre n'est pas normal, on a $\phi_i \neq \frac{\pi}{2}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Par suite, ou bien $\phi_i < \frac{\pi}{2}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, et alors $\sum_1^4 \phi_i$

$< \pi$, suivant la proposition 4, ou bien $\phi_i > \frac{\pi}{2}$ pour un seul indice, soit $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, et alors $\sum_1^4 \phi_i > \pi$, suivant la proposition 5. Donc la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ n'est jamais vraie pour un tétraèdre qui n'est pas normal. Cela démontre le théorème, compte tenu aussi de la proposition 3.

La borne supérieure de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ lorsque $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, par exemple, se réalise sur la frontière du domaine $U' \subset U$ obtenu en adjoignant les conditions

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} \geqq \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} \geqq \frac{\pi}{2}$$

aux relations définissant U. Sans entrer dans les détails, on remarque que l'ensemble des valeurs de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ sur des X_{d2} de la forme $A_4 A_3 A_1 A_2^{\infty}$ avec

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} > \frac{\pi}{2},$$

admet le maximum

$$2 \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

qui semble être le supremum cherché.

Toutes les propriétés précédentes sont de caractère local, parce qu'elles se traduisent, d'une façon évidente, par des propriétés des angles que font deux à deux les six droites $d_{ij} = \Pi_k \cap \Pi_l$, en désignant par Π_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, quatre plans issus d'un même point de R^n et parallèles aux faces du tétraèdre.

Cas d'un simplexe quelconque $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$.

Les deux exemples suivants montrent que la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ ne peut pas s'étendre de la même façon à des simplexes de dimension $n \geqq 4$.

a) Le n-simplexe dont toutes les arêtes sont égales à a donne lieu aux relations

$$\omega^2 = \frac{n+1}{2^n} a^{2n}, \quad \tau_i = \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}, \quad \sum_1^{n+1} \phi_i = (n+1) \arc \sin \sqrt{\frac{n+1}{2^n}},$$

donc $\sum_1^{n+1} \phi_i < \pi$ pour $n \geqq 4$, et $\sum_1^{n+1} \phi_i \to 0$ pour $n \to +\infty$.

b) Considérant le simplexe défini par n vecteurs orthonormés $\overrightarrow{x_{12}}, \overrightarrow{x_{13}}, \ldots, \overrightarrow{x_{1,n+1}}$, on obtient

$$\omega = 1, \tau_1 = 1, \tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

$$\sum_1^{n+1} \phi_i = \frac{\pi}{2} + n \arc \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

$$\text{donc } \sum_1^{n+1} \phi_i < \pi \text{ pour } n \geqq 4, \text{ et } \sum_1^{n+1} \phi_i \to \frac{\pi}{2} \text{ pour } n \to +\infty.$$

EXERCICES.

1. R^n étant le plus petit espace linéaire contenant les points $a_1, \ldots, a_q$, déterminer le minimum de

$$f(x) = \sum_1^q \mu_i \,|\, x - a_i \,|^{v_i}, \quad (\mu_i > 0, v_i \geqq 1; i = 1, 2, \ldots, q),$$

lorsque x décrit un sous-espace linéaire de R^n.

2) Dans un tétraède $A_1 A_2 A_3 A_4$, soit $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ le dièdre des deux faces qui se coupent suivant l'arête $A_i A_j$. Démontrer la relation

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_{ij}} = x_{ij} x_{kl} \operatorname{ctg} \alpha_{kl}.$$

En déduire la formule

$$3\omega = x_{12} x_{34} (x_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{34} + x_{34} \operatorname{ctg} \alpha_{12})$$
$$+ x_{13} x_{24} (x_{13} \operatorname{ctg} \alpha_{24} + x_{24} \operatorname{ctg} \alpha_{13}) + x_{14} x_{23} (x_{14} \operatorname{ctg} \alpha_{23} + x_{23} \operatorname{ctg} \alpha_{14}).$$

3. Pour tout tétraèdre normal on a

$$x_{12} x_{34} \operatorname{ctg} \alpha_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{34} = x_{13} x_{24} \operatorname{ctg} \alpha_{13} \operatorname{ctg} \alpha_{24} = x_{14} x_{23} \operatorname{ctg} \alpha_{14} \operatorname{ctg} \alpha_{23},$$
$$x_{12} \operatorname{tg} \alpha_{12} + x_{34} \operatorname{tg} \alpha_{34} = x_{13} \operatorname{tg} \alpha_{13} + x_{24} \operatorname{tg} \alpha_{24} = x_{14} \operatorname{tg} \alpha_{14} + x_{23} \operatorname{tg} \alpha_{23}.$$

4. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trois vecteurs non coplanaires tels que $\vec{a}\vec{b} \neq 0$, $\vec{b}\vec{c} \neq 0$, $\vec{c}\vec{a} \neq 0$. Alors les angles formés par les vecteurs $(\vec{b}\vec{c})\,\vec{a}$, $(\vec{c}\vec{a})\,\vec{b}$, $(\vec{a}\vec{b})\,\vec{c}$ sont tous inférieurs ou tous supérieurs à $\frac{\pi}{2}$. Dans le premier cas on pose

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \arcsin \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|}$$

et dans le second

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pi - \arcsin \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|}\,.$$

Démontrer la formule

$$\begin{aligned}&\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \phi(\vec{a}, \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}), \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}))\\ &+ \phi(\vec{b}, \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}), \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})) + \phi(\vec{c}, \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}), \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a})) = \pi\end{aligned}$$

(Reçu le 11 avril 1967)

M. Nikias Stavroulakis
105, rue de la Convention
Paris 15e

vide-leer-empty