I. Introduction

SUR LES BORNES DE CERTAINES FONCTIONS ET SUR LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE

Par Nikias STAVROULAKIS

I. INTRODUCTION

Soit f: $U \to \bar{R}$, $\bar{R}$ étant la droite achevée, une fonction numérique *continue* sur un ouvert U de R^n, et $E \subset U$ l'ensemble maximal, supposé non vide, possédant la propriété suivante: $\forall x \in E$, toutes les dérivées premières de f existent en x. Soit E_0 le complémentaire de E dans U et $E_1 \subset E$ l'ensemble maximal satisfaisant à la propriété suivante: $\forall x \in E_1$, toutes les dérivées premières de f s'annulent en x.

PROPOSITION. *En désignant par* F *la frontière de* U *dans* $\bar{R}^n$ *et par* L (F) *l'ensemble des valeurs limites de* f *aux points de* F, *les bornes de* f *s'obtiennent par les formules*

$$\sup f = \sup(f(E_0) \cup f(E_1) \cup \{\sup L(F)\}),$$
$$\inf f = \inf(f(E_0) \cup f(E_1) \cup \{\inf L(F)\}) \qquad (I.1)$$

ou par les formules équivalentes

$$\sup f = \sup(f(E_0) \cup f(E_1) \cup \overline{L(F)}),$$
$$\inf f = \inf(f(E_0) \cup f(E_1) \cup \underline{L(F)})$$

où $\overline{\mathrm{L}(\mathrm{F})}$, $\underline{\mathrm{L}(\mathrm{F})}$ *sont respectivement les ensembles des limites supérieures et inférieures de* f *aux points de* F.

Démonstration. Bornons-nous à la démonstration de la première formule. Pour $x \in \bar{U} = U \cup F$, désignons par L_x l'ensemble des valeurs limites de f au point x. Alors

$$\sup f = \sup f(U) = \sup(f(U) \cup (\bigcup_{x \in \bar{U}} L_x)).$$

Comme $L_x = \{f(x)\}$, $\forall x \in U$, en vertu de la continuité, il s'ensuit

$$f(U) \cup (\bigcup_{x \in \bar{U}} L_x) = f(U) \cup L(F) = f(E_0) \cup f(E) \cup L(F).$$

L'ensemble $f(U) \cup L(F)$ étant fermé, il contient la valeur $\sup f$; donc on ne modifie pas le sup $(f(U) \cup L(F))$ en retranchant de cet ensemble toute valeur inférieure à $\sup f$. Il en est ainsi en particulier des valeurs $f(x)$ pour $x \in E, x \notin E_1$, puisque $f(x) = \sup f, x \in E \Rightarrow x \in E_1$, et aussi des valeurs inférieures à $\sup L(F)$, d'où le résultat.

Les formules (I. 1) permettent souvent le calcul des $\sup f$, $\inf f$, sans aucune hypothèse concernant les dérivées secondes. Leur extension au cas où U est un ouvert d'une variété C^1 est immédiate, mais, pour éviter les complications, f doit alors être supposée différentiable en tout point de E; on peut d'ailleurs les compléter d'une façon évidente lorsque f présente des discontinuités dans E_0.

II. Détermination du minimum de certaines fonctions convexes

Dans l'espace R^n, muni de la distance euclidienne, on se donne q points $a_1, a_2, \ldots, a_q$ tels que R^n soit le plus petit espace linéaire qui les contient. Nous allons considérer des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \,|\, x - a_i \,|^{\nu_i}$$

où μ_i, ν_i sont des nombres réels tels que $\mu_i > 0, \nu_i \geqq 1, (i = 1, 2, \ldots, q)$. Dans le cas trivial où $n = 1, \nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_q = 1$, on a

$$\inf f = \inf \{ f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_q) \},$$

parce que le graphe de f est alors une ligne brisée convexe de sommets $(a_i, f(a_i)), (i = 1, 2, \ldots, q)$; si cette ligne possède un côté parallèle à l'axe des x, la fonction f n'est pas strictement convexe.

Proposition. *Le cas trivial ci-dessus étant écarté,* f *est toujours strictement convexe et l'équation* $df = 0$ *admet une ou n'admet aucune solution.*

Si $df = 0$ *pour* $x = x_0$, *le point* x_0 *appartient à l'intérieur* $\mathring{T}$ *de l'enveloppe convexe* T *des* $a_1, a_2, \ldots, a_q$ *et fournit le minimum. Si l'équation* $df = 0$ *n'a pas de solution, on aura* $\inf f = \inf \{ f(a_i) \mid \nu_i = 1 \}$, *ce qui montre en particulier que la solution* x_0 *existe quand* $\nu_i > 1$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, q$.

Démonstration. La fonction $|\, x \,|^\nu$, où $\nu \geqq 1$, étant convexe, il en est de même des $\mu_i \,|\, x - a_i \,|^{\nu_i}$ et de leur somme $f(x)$. La fonction $|\, x \,|^\nu$, où $\nu > 1$, étant strictement convexe, il s'ensuit la même propriété pour f lorsqu'il existe un indice tel que $\nu_i > 1$. Lorsque $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_q = 1$, alors $n \geqq 2$; donc, $\forall x \in R^n$, $\forall x' \in R^n$, on aura $|\, \alpha x + (1 - \alpha) x' - a_i \,| =$