

# I. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES BORNES DE CERTAINES FONCTIONS ET SUR LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE

Par Nikias STAVROULAKIS

## I. INTRODUCTION

Soit  $f: U \rightarrow \bar{R}$ ,  $\bar{R}$  étant la droite achevée, une fonction numérique continue sur un ouvert  $U$  de  $R^n$ , et  $E \subset U$  l'ensemble maximal, supposé non vide, possédant la propriété suivante:  $\forall x \in E$ , toutes les dérivées premières de  $f$  existent en  $x$ . Soit  $E_0$  le complémentaire de  $E$  dans  $U$  et  $E_1 \subset E$  l'ensemble maximal satisfaisant à la propriété suivante:  $\forall x \in E_1$ , toutes les dérivées premières de  $f$  s'annulent en  $x$ .

**PROPOSITION.** *En désignant par  $F$  la frontière de  $U$  dans  $\bar{R}^n$  et par  $L(F)$  l'ensemble des valeurs limites de  $f$  aux points de  $F$ , les bornes de  $f$  s'obtiennent par les formules*

$$\begin{aligned} \sup f &= \sup (f(E_0) \cup f(E_1) \cup \{ \sup L(F) \}), \\ \inf f &= \inf (f(E_0) \cup f(E_1) \cup \{ \inf L(F) \}) \end{aligned} \quad (I.1)$$

ou par les formules équivalentes

$$\begin{aligned} \sup f &= \sup (f(E_0) \cup f(E_1) \cup \overline{L(F)}), \\ \inf f &= \inf (f(E_0) \cup f(E_1) \cup \underline{L(F)}) \end{aligned}$$

où  $\overline{L(F)}$ ,  $\underline{L(F)}$  sont respectivement les ensembles des limites supérieures et inférieures de  $f$  aux points de  $F$ .

*Démonstration.* Bornons-nous à la démonstration de la première formule. Pour  $x \in \bar{U} = U \cup F$ , désignons par  $L_x$  l'ensemble des valeurs limites de  $f$  au point  $x$ . Alors

$$\sup f = \sup f(U) = \sup (f(U) \cup (\cup_{x \in U} L_x)).$$

Comme  $L_x = \{f(x)\}$ ,  $\forall x \in U$ , en vertu de la continuité, il s'ensuit

$$f(U) \cup (\cup_{x \in U} L_x) = f(U) \cup L(F) = f(E_0) \cup f(E) \cup L(F).$$

L'ensemble  $f(U) \cup L(F)$  étant fermé, il contient la valeur  $\sup f$ ; donc on ne modifie pas le  $\sup (f(U) \cup L(F))$  en retranchant de cet ensemble toute valeur inférieure à  $\sup f$ . Il en est ainsi en particulier des valeurs  $f(x)$  pour  $x \in E, x \notin E_1$ , puisque  $f(x) = \sup f, x \in E \Rightarrow x \in E_1$ , et aussi des valeurs inférieures à  $\sup L(F)$ , d'où le résultat.

Les formules (I. 1) permettent souvent le calcul des  $\sup f, \inf f$ , sans aucune hypothèse concernant les dérivées secondes. Leur extension au cas où  $U$  est un ouvert d'une variété  $C^1$  est immédiate, mais, pour éviter les complications,  $f$  doit alors être supposée différentiable en tout point de  $E$ ; on peut d'ailleurs les compléter d'une façon évidente lorsque  $f$  présente des discontinuités dans  $E_0$ .

## II. DÉTERMINATION DU MINIMUM DE CERTAINES FONCTIONS CONVEXES

Dans l'espace  $R^n$ , muni de la distance euclidienne, on se donne  $q$  points  $a_1, a_2, \dots, a_q$  tels que  $R^n$  soit le plus petit espace linéaire qui les contient. Nous allons considérer des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^q \mu_i |x - a_i|^{v_i}$$

où  $\mu_i, v_i$  sont des nombres réels tels que  $\mu_i > 0, v_i \geq 1, (i = 1, 2, \dots, q)$ . Dans le cas trivial où  $n = 1, v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$ , on a

$$\inf f = \inf \{ f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_q) \},$$

parce que le graphe de  $f$  est alors une ligne brisée convexe de sommets  $(a_i, f(a_i)), (i = 1, 2, \dots, q)$ ; si cette ligne possède un côté parallèle à l'axe des  $x$ , la fonction  $f$  n'est pas strictement convexe.

**PROPOSITION.** *Le cas trivial ci-dessus étant écarté,  $f$  est toujours strictement convexe et l'équation  $df = 0$  admet une ou n'admet aucune solution.*

*Si  $df = 0$  pour  $x = x_0$ , le point  $x_0$  appartient à l'intérieur  $\overset{\circ}{T}$  de l'enveloppe convexe  $T$  des  $a_1, a_2, \dots, a_q$  et fournit le minimum. Si l'équation  $df = 0$  n'a pas de solution, on aura  $\inf f = \inf \{ f(a_i) \mid v_i = 1 \}$ , ce qui montre en particulier que la solution  $x_0$  existe quand  $v_i > 1$  pour  $i = 1, 2, \dots, q$ .*

*Démonstration.* La fonction  $|x|^v$ , où  $v \geq 1$ , étant convexe, il en est de même des  $\mu_i |x - a_i|^{v_i}$  et de leur somme  $f(x)$ . La fonction  $|x|^v$ , où  $v > 1$ , étant strictement convexe, il s'ensuit la même propriété pour  $f$  lorsqu'il existe un indice tel que  $v_i > 1$ . Lorsque  $v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$ , alors  $n \geq 2$ ; donc,  $\forall x \in R^n, \forall x' \in R^n$ , on aura  $|\alpha x + (1 - \alpha)x' - a_i| =$