III. Sur les relations métriques dans un simplexe

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Suivant les données concrètes du problème, la recherche de x_0 peut être simplifiée, notamment si $v_1 = v_2 = \ldots = v_q = 1$, cas dans lequel $df = 0$ s'écrit

$$\sum_1^q \mu_i v_i = 0 \qquad \text{où} \qquad v_i = -\frac{x - a_i}{| x - a_i |}.$$

Lorsque, par exemple, $n = 2$, $q = 3$, $v_1 = v_2 = v_3 = 1$, la condition

$$\sum_1^3 \mu_i v_i = 0$$

ne peut être vraie que si $\mu_1 + \mu_2 > \mu_3$, $| \mu_1 - \mu_2 | < \mu_3$; donc quand ces relations ne sont pas remplies, on a $\inf f = \inf \{ f(a_1), f(a_2), f(a_3) \}$. Si elles sont remplies, on considère les angles $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ d'un triangle $A_1 A_2 A_3$ tel que $| \overrightarrow{A_2 A_3} | = \mu_1$, $| \overrightarrow{A_3 A_1} | = \mu_2$, $| \overrightarrow{A_1, A_2} | = \mu_3$; alors, si les angles $\pi - \hat{A}_1, \pi - \hat{A}_2, \pi - \hat{A}_3$ sont supérieurs respectivement aux angles $\sphericalangle (a_2 a_1 a_3)$, $\sphericalangle (a_3 a_2 a_1)$, $\sphericalangle (a_1 a_3 a_2)$, le point x_0 existe et, compte tenu des $\sphericalangle (a_2 x_0 a_3) = \pi - \hat{A}_1$, $\sphericalangle (a_3 x_0 a_1) = \pi - \hat{A}_2$, $\sphericalangle (a_1 x_0 a_2) = \pi - \hat{A}_3$, se détermine facilement; en cas contraire, on a encore $\inf f = \inf \{ f(a_1), f(a_2), f(a_3) \}$.

III. Sur les relations métriques dans un simplexe

Etant donné un simplexe euclidien $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$, on désigne par $\overrightarrow{x_{ij}}$ le vecteur $\overrightarrow{A_i A_j}$, ce qui entraîne $| \overrightarrow{x_{ij}} | = | \overrightarrow{x_{ji}} | = x_{ij} = x_{ji}$, $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n + 1)$, et par ω le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{x_{i1}}, \overrightarrow{x_{i2}}, \ldots, \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, \ldots, \overrightarrow{x_{i,n+1}}$, issus de A_i. Ce volume, qui ne dépend pas du sommet choisi, permet d'associer à chaque sommet A_i un angle ϕ_i défini par les conditions suivantes:

a) $\sin \phi_i = \tau_i = \dfrac{\omega}{x_{i1}\, x_{i2} \ldots x_{i,i-1}\, x_{i,i+1} \ldots x_{i,n+1}}$;

b) $0 < \phi_i < \dfrac{\pi}{2}$, lorsque parmi les angles que font les vecteurs

$\overrightarrow{x_{i1}}, \overrightarrow{x_{i2}}, \ldots, \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, \ldots, \overrightarrow{x_{i,n+1}}$, pris deux à deux, il y en a au moins un inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} \leqq \phi_i < \pi$ en cas contraire.

Alors l'un au plus des ϕ_i peut être supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. On pose le problème de préciser les propriétés caractéristiques de la somme $\sum_{i=1}^{n+1} \phi_i$ qui, dans les cas où $n = 1$ et $n = 2$, se réduit à la constante π.

Cas du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$

Nous introduirons souvent dans une même expression ou relation les indices i, j, k, l; il sera alors sous-entendu que (i, j, k, l) est une permutation de $(1, 2, 3, 4)$.

Désignant par $\sigma = \sigma(\{x_{ij}^2\})$ la forme ω^2 qui est donnée par

$$\begin{aligned} 4\sigma = 4\omega^2 = {} & x_{12}^2 x_{34}^2 (x_{13}^2 + x_{24}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{12}^2 - x_{34}^2) \\ & + x_{13}^2 x_{24}^2 (x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{13}^2 - x_{24}^2) \\ & + x_{14}^2 x_{23}^2 (x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{13}^2 + x_{24}^2 - x_{14}^2 - x_{23}^2) \\ & - x_{12}^2 x_{13}^2 x_{23}^2 - x_{12}^2 x_{14}^2 x_{24}^2 - x_{13}^2 x_{14}^2 x_{34}^2 - x_{23}^2 x_{24}^2 x_{34}^2 \end{aligned} \tag{III.1}$$

on voit que, les x_{ij} étant rangés dans un ordre déterminé, les fonctions $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ sont définies sur l'ouvert connexe

$$U : (\sigma(\{x_{ij}^2\}) > 0, \ |x_{12}^2 + x_{13}^2 - x_{23}^2| < 2x_{12} x_{13}, \ 0 < x_{ij} < +\infty, \ i \neq j;$$
$$i, j = 1, 2, 3, 4)$$

de R^6 où sont aussi définis les tétraèdres. Identifions chaque point $X \in U$ au tétraèdre correspondant $A_i A_j A_k A_l$. La frontière F de U dans $\bar{R}^6$ donne lieu à des tétraèdres dégénérés parmi lesquels on distingue *a)* les figures planes X_{d1} obtenues pour des valeurs finies et non nulles des x_{ij}, *b)* les tétraèdres dégénérés X_{d2} de la forme $A_i A_j A_k A_l^\infty$, A_l^∞ désignant un sommet éloigné à l'infini, *c)* les tétraèdres dégénérés X_{d3} de la forme $A_i A_j A_k^\infty A_l^\infty$.

Proposition 1. *Désignant par* s_i *une valeur limite de* τ_i *sur* F, *l'ensemble des systèmes de valeurs* (s_i, s_j, s_k, s_l) *qui ne sont pas de la forme* $(\tau_i, \tau_j, \tau_k, \tau_l)$, *s'obtient en nous bornant aux tétraèdres dégénérés* X_{d1}, X_{d2}, X_{d3}. *En particulier, on a sur* X_{d1}:

$$(s_i, s_j, s_k, s_l) = (0, 0, 0, 0)$$

sur X_{d2}:

$$(s_i, s_j, s_k, s_l) = (\sin\alpha_i \sin\psi, \sin\alpha_j \sin\psi, \sin\alpha_k \sin\psi, 0)$$

avec

$$0 \leqq \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k \leqq \pi\,, \quad \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k = \pi\,, \quad 0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}\,,$$

sur X_{d3}:

$$\begin{aligned}(s_i, s_j, s_k, s_l) &= (\sin\alpha_i \sin\psi, \sin\alpha_j \sin\psi, 0, 0)\\ &= (\sin\alpha_i \sin\psi, \sin\alpha_i \sin\psi, 0, 0)\end{aligned}$$

avec

$$0 \leqq \alpha_i, \alpha_j \leqq \pi\,, \quad \alpha_i + \alpha_j = \pi\,, \quad 0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}\,.$$

PROPOSITION *2. Soient* A_1, A_2, A_3, A_4 *quatre points distincts dans un espace euclidien* R^n *et désignons par* $\varphi_{(ij)(kl)}$ *l'angle aigu (ou droit) des directions définies par* $A_i A_j$ *et* $A_k A_l$. *Alors les relations*

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)}$$

entraînent nécessairement

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = 0\,.$$

Démonstration. Comme

$$2x_{ij}\, x_{kl} \cos\varphi_{(ij)(kl)} = 2\,|\vec{x}_{ij}\, \vec{x}_{kl}| = |x_{il}^2 + x_{jk}^2 - x_{ik}^2 - x_{jl}^2|\,,$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}\frac{|x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{13}^2 - x_{24}^2|}{x_{12}\, x_{34}} &= \frac{|x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{12}^2 - x_{34}^2|}{x_{13}\, x_{24}}\\ &= \frac{|x_{13}^2 + x_{24}^2 - x_{22}^2 - x_{34}^2|}{x_{14}\, x_{23}}\,.\end{aligned}$$

Ces relations sont d'abord remplies lorsque

$$x_{12}^2 + x_{34}^2 = x_{13}^2 + x_{24}^2 = x_{14}^2 + x_{23}^2 = \lambda^2\,, \qquad (III.2)$$

λ étant une longueur convenable, et alors

$$\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = \frac{\pi}{2}.$$

En cas contraire, on peut supposer $x_{14}^2 + x_{23}^2 > x_{13}^2 + x_{24}^2 > x_{12}^2 + x_{34}^2$, ce qui donne

$$x_{13} x_{24} = x_{12} x_{34} + x_{14} x_{23}, \tag{III.3}$$

$$x_{13} x_{24} (x_{13}^2 + x_{24}^2) = x_{12} x_{34} (x_{12}^2 + x_{34}^2) + x_{14} x_{23} (x_{14}^2 + x_{23}^2). \tag{III.4}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} x_{12}^2 x_{34}^2 (x_{13}^2 + x_{24}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{12}^2 - x_{34}^2) \\ = x_{12} x_{34} \big(x_{13} x_{24} (x_{14}^2 + x_{23}^2) - x_{14} x_{23} (x_{13}^2 + x_{24}^2)\big), \\ x_{13}^2 x_{24}^2 (x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{14}^2 + x_{23}^2 - x_{13}^2 - x_{24}^2) \\ = x_{13} x_{24} \big(x_{14} x_{23} (x_{12}^2 + x_{34}^2) + x_{12} x_{34} (x_{14}^2 + x_{23}^2)\big), \\ x_{14}^2 x_{23}^2 (x_{12}^2 + x_{34}^2 + x_{13}^2 + x_{24}^2 - x_{14}^2 - x_{23}^2) \\ = x_{14} x_{23} \big(x_{13} x_{24} (x_{12}^2 + x_{34}^2) - x_{12} x_{34} (x_{13}^2 + x_{24}^2)\big). \end{aligned}$$

Remplaçant dans (III. 1) on trouve

$$\sigma(\{ x_{ij}^2 \}) = -(x_{12} x_{13} x_{23} + x_{13} x_{14} x_{34} - x_{12} x_{14} x_{24} - x_{23} x_{24} x_{34})^2.$$

Comme $\sigma(\{ x_{ij}^2 \}) > 0$, $\forall X \in U$, il reste à voir s'il existe des X_{d1} tels que

$$x_{13} (x_{12} x_{23} + x_{14} x_{34}) = x_{24} (x_{12} x_{14} + x_{23} x_{34}). \tag{III.5}$$

Remplaçant les valeurs des x_{13}, x_{24}, tirées des (III. 3), (III. 5), dans (III. 4) on obtient $(x_{14} - x_{23})^2 = (x_{12} + x_{34})^2$, ce qui donne $x_{14} = x_{12} + x_{23} + x_{34}$ ou $x_{23} = x_{21} + x_{14} + x_{43}$. Les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont donc alignés et $\varphi_{(12)(34)} = \varphi_{(13)(24)} = \varphi_{(14)(23)} = 0$.

Tout tétraèdre satisfaisant à (III. 2) sera dit *normal.* On considère aussi des tétraèdres normaux dégénérés X_{d1}, X_{d2}, X_{d3} résultant des déformations continues des tétraèdres normaux.

COROLLAIRE. *Pour qu'un tétraèdre soit normal il faut et il suffit que*

$$x_{12} \frac{\partial \omega}{\partial x_{12}} + x_{34} \frac{\partial \omega}{\partial x_{34}} = x_{13} \frac{\partial \omega}{\partial x_{13}} + x_{24} \frac{\partial \omega}{\partial x_{24}} = x_{14} \frac{\partial \omega}{\partial x_{14}} + x_{23} \frac{\partial \omega}{\partial x_{23}},$$

ou, en vertu du théorème d'Euler,

$$x_{12}\frac{\partial\omega}{\partial x_{12}} + x_{34}\frac{\partial\omega}{\partial x_{34}} = \omega\,, \qquad x_{13}\frac{\partial\omega}{\partial x_{13}} + x_{24}\frac{\partial\omega}{\partial x_{24}} = \omega \qquad (III.6)$$

ou encore, en posant $y_{ij} = x_{ij}^2$, $\quad \sigma = \sigma(\{y_{ij}\})$,

$$y_{12}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{12}} + y_{34}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{34}} = \sigma\,, \qquad y_{13}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{13}} + y_{24}\frac{\partial\sigma}{\partial y_{24}} = \sigma\,. \qquad (III.7)$$

PROPOSITION 3. *La relation* $\sum_{i=1}^{4} \phi_i = \pi$ *est valable pour tout tétraèdre normal.*

Démonstration. En vertu de (III. 2), on peut associer à chaque sommet A_i d'un tétraèdre normal le paramètre y_i défini par les relations

$$\begin{aligned} 2\vec{x}_{ij}\,\vec{x}_{ik} &= 2\vec{x}_{ik}\,\vec{x}_{il} = 2\vec{x}_{il}\,\vec{x}_{ij} = x_{ij}^2 + x_{ik}^2 - x_{jk}^2 \\ &= x_{ik}^2 + x_{il}^2 - x_{kl}^2 = x_{il}^2 + x_{ij}^2 - x_{lj}^2 = 2y_i\,, \qquad (III.8) \end{aligned}$$

d'où

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \lambda^2\,, \quad x_{ij}^2 = y_{ij} = y_i + y_j\,, \quad (i \neq j;\, i, j = 1, 2, 3, 4)\,. \qquad (III.9)$$

Remplaçant dans l'expression de $\frac{\partial\sigma}{\partial y_{ij}}$ on trouve $\frac{\partial\sigma}{\partial y_{ij}} = y_k\,y_l$ et ensuite, moyennant (III. 7),

$$\sigma = y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_3 y_4 + y_2 y_3 y_4\,. \qquad (III.10)$$

Comme d'ailleurs

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_{ij}^2 & y_i & y_i \\ y_i & x_{ik}^2 & y_i \\ y_i & y_i & x_{il}^2 \end{vmatrix} = x_{ij}^2\,x_{ik}^2\,x_{il}^2 - \lambda^2\,y_i^2\,,$$

on en déduit

$$\cos^2\phi_i = 1 - \sin^2\phi_i = 1 - \frac{\sigma}{x_{ij}^2\,x_{ik}^2\,x_{il}^2} = \frac{\lambda^2\,y_i^2}{x_{ij}^2\,x_{ik}^2\,x_{il}^2}\,.$$

Désignant par ψ_{ij} l'angle des vecteurs $\overrightarrow{x_{ik}}, \overrightarrow{x_{il}}$, il s'ensuit, d'après (III. 8), que les $\psi_{ij}, \psi_{ik}, \psi_{il}$ sont tout ensemble inférieurs, égaux ou supérieurs à $\frac{\pi}{2}$ suivant que $y_i > 0$, $y_i = 0$ ou $y_i < 0$. Selon la définition de ϕ_i, on a donc respectivement

$$\phi_i < \frac{\pi}{2}\,, \quad \phi_i = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \phi_i > \frac{\pi}{2}\,,$$

et cela prouve que

$$\cos\phi_i = \frac{\lambda y_i}{x_{ij}\, x_{ik}\, x_{il}}\,.$$

Remplaçant les $\sin\phi_i$, $\cos\phi_i$ dans l'identité

$$\sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) =$$
$$\sum \sin\phi_i \cos\phi_j \cos\phi_k \cos\phi_l - \sum \cos\phi_i \sin\phi_j \sin\phi_k \sin\phi_l$$

et tenant compte des (III. 9), (III. 10), on obtient

$$\sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) = \frac{\lambda\sqrt{\sigma}}{y_{12}\, y_{13}\, y_{14}\, y_{23}\, y_{24}\, y_{34}}$$
$$\Big((y_1y_2y_3 + y_1y_2y_4 + y_1y_3y_4 + y_2y_3y_4)\lambda^2 - (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\,\sigma\Big) = 0\,.$$

Comme d'ailleurs $0 < \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 < 2\pi$, il s'ensuit

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \pi\,.$$

Corollaire. *Si* $\phi_i > 0$, (i = 1, 2, 3, 4), *et* $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \pi$, *il existe une infinité de tétraèdres normaux tels que* $\tau_i = \sin\phi_i$, (i = 1, 2, 3, 4). *Leurs arêtes sont données par les formules*

$$x_{ij} = x_{ji} = k\sqrt{ctg\,\phi_i + ctg\,\phi_j}\,,$$

k *étant une longueur arbitraire.*

La relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ s'étend immédiatement aux tétraèdres normaux dégénérés X_{d1}, X_{d2}, X_{d3}. Il n'en est pas de même pour tous les autres X_{d1}, X_{d2}, X_{d3}. Si un X_{d1}, par exemple, est tel que

$$\psi_{12} = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \psi_{13} > \frac{\pi}{2}\,, \qquad \psi_{14} > \frac{\pi}{2}\,,$$

la somme $\sum_1^4 \phi_i$, calculée sur les X qui ont pour limite X_{d1}, aura deux valeurs limites, 0 et π.

DÉTERMINATION DES BORNES D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE $f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ PAR APPLICATION DES FORMULES (I. 1). La forme de f est supposée telle que $f(u_1, u_2, u_3, u_4)$ soit continue sur un ouvert de R^4 contenant le cube $0 \leqq u_i \leqq 1$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. L'ensemble $E_0 \subset U$, donc aussi $E \subset U$, s'obtient par l'intermédiaire de l'ensemble des points de R^4 où les dérivées de $f(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ne sont pas définies.

En ce qui concerne la détermination de E_1, on peut se limiter à la considération de l'ensemble $E \cap H$, H étant un hyperplan $(x_{23} = c_{23} > 0)$, puisque f est homogène de degré zéro. Etant donné que

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} = -\frac{1}{x_{ij}}\left(\tau_i \frac{\partial f}{\partial \tau_i} + \tau_j \frac{\partial f}{\partial \tau_j}\right) + \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x_{ij}}\left(\sum_1^4 \tau_q \frac{\partial f}{\partial \tau_q}\right),$$

on obtient la relation

$$\left(x_{12}\frac{\partial f}{\partial x_{12}} + x_{34}\frac{\partial f}{\partial x_{34}}\right)\omega = \left(x_{12}\frac{\partial \omega}{\partial x_{12}} + x_{34}\frac{\partial \omega}{\partial x_{34}} - \omega\right)\left(\sum_1^4 \tau_q \frac{\partial f}{\partial \tau_q}\right)$$

et les deux autres qui s'en déduisent par permutation d'indices. Par conséquent les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_{12}} = \frac{\partial f}{\partial x_{34}} = \frac{\partial f}{\partial x_{13}} = \frac{\partial f}{\partial x_{24}} = \frac{\partial f}{\partial x_{14}} = 0$$

sont d'abord remplies sur l'ensemble $E_1' \subset E \cap H$ défini par

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_1} = \frac{\partial f}{\partial \tau_2} = \frac{\partial f}{\partial \tau_3} = \frac{\partial f}{\partial \tau_4} = 0\,,$$

puis sur un ensemble $E_1'' \subset E \cap H$ tel que tout $X \in E_1''$ satisfasse aux (III. 6) et soit donc normal. Ainsi $E_1 = E_1' \cup E_1''$ et $f(E_1) = f(E_1') \cup f(E_1'')$. Etant donné qu'en tout $X \in E_1''$ la valeur de f est de la forme

$$f(\sin\phi_1, \sin\phi_2, \sin\phi_3, \sin\phi_4) = g(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \quad \text{avec} \quad \sum_1^4 \phi_i = \pi\,,$$

suivant la proposition 3, on peut éviter la détermination de E_1'' en lui substituant le problème, plus facile en général, de la détermination des bornes de $g(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ sous les conditions

$$0 < \phi_i < \pi\,, \quad (i = 1, 2, 3, 4)\,, \quad \sum_1^4 \phi_i = \pi\,.$$

En ce qui concerne le calcul des $\sup L'(F)$, $\inf L'(F)$, où $L'(F)$ est l'ensemble des valeurs limites qui ne sont pas de la forme $f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, on voit, compte tenu de la proposition 1, que *a)* les X_{d1} donnent la seule valeur $f(0, 0, 0, 0)$, *b)* les X_{d2} donnent les fonctions

$$f(\sin\alpha_1 \sin\psi, \sin\alpha_2 \sin\psi, \sin\alpha_3 \sin\psi, 0),$$
$$f(\sin\alpha_1 \sin\psi, \sin\alpha_2 \sin\psi, 0, \sin\alpha_3 \sin\psi),$$
$$f(\sin\alpha_1 \sin\psi, 0, \sin\alpha_2 \sin\psi, \sin\alpha_3 \sin\psi),$$
$$f(0, \sin\alpha_1 \sin\psi, \sin\alpha_2 \sin\psi, \sin\alpha_3 \sin\psi),$$
$$\left(0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < \pi, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi, \quad 0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

dont les bornes s'obtiennent moyennant les formules (I. 1), *c)* les X_{d3} donnent les fonctions

$$f(\sin\alpha \sin\psi, \sin\alpha \sin\psi, 0, 0), \quad f(\sin\alpha \sin\psi, 0, \sin\alpha \sin\psi, 0),$$
$$f(\sin\alpha \sin\psi, 0, 0, \sin\alpha \sin\psi), \quad f(0, \sin\alpha \sin\psi, \sin\alpha \sin\psi, 0),$$
$$f(0, \sin\alpha \sin\psi, 0, \sin\alpha \sin\psi), \quad f(0, 0, \sin\alpha \sin\psi, \sin\alpha \sin\psi),$$
$$\left(0 < \alpha < \pi, 0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

dont les bornes s'obtiennent également par la méthode générale.

Ayant obtenu les $\sup L'(F)$, $\inf L'(F)$, on a

$$\sup f = \sup\left(f(E_0) \cup f(E_1') \cup \{\sup g, \sup L'(F)\}\right),$$
$$\inf f = \inf\left(f(E_0) \cup f(E_1') \cup \{\inf g, \inf L'(F)\}\right).$$

Si l'on désigne par $\arcsin \tau_i$ le plus petit arc positif ayant le sinus τ_i, la démonstration des propositions suivantes est maintenant immédiate.

PROPOSITION 4. *La fonction* $\sum_1^4 \arcsin \tau_i$ *vérifie les relations*

$$0 \leqq \sum_1^4 \arcsin \tau_i \leqq \pi .$$

La borne supérieure π *s'obtient* a) *sur tout tétraèdre normal pour lequel l'un des* ϕ_i *est égal à* $\frac{\pi}{2}$, b) *sur tout tétraèdre normal pour lequel* $\phi_i < \frac{\pi}{2}$, (i = 1, 2, 3, 4), c) *sur tout tétraèdre normal dégénéré* X_{d2}, $A_i A_j A_k A_l^{\infty}$, *dont* *la face* $A_i A_j A_k$ *n'a aucun angle supérieur à* $\frac{\pi}{2}$, d) *sur tout tétraèdre normal dégénéré* X_{d3}, $A_i A_j A_k^\infty A_l^\infty$, *tel que* $\phi_i = \phi_j = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, pour tout tétraèdre qui n'est pas normal, on a

$$\sum_1^4 \arcsin \tau_i < \pi .$$

Proposition 5. *La fonction*

$$- \arcsin \tau_4 + \sum_1^3 \arcsin \tau_i$$

vérifie les relations

$$0 \leqq - \arcsin \tau_4 + \sum_1^3 \arcsin \tau_i \leqq \pi .$$

La borne inférieure 0 *s'obtient* a) *sur tout tétraèdre normal pour lequel* $\phi_4 \geqq \frac{\pi}{2}$, b) *sur tout* X_{d1} *et sur toute autre forme dégénérée pour laquelle* $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$, c) *sur tout tétraèdre normal dégénéré* $A_4 A_i A_j A_k^\infty$ *tel que* $\psi_{4k} \geqq \frac{\pi}{2}$, d) *sur tout* X_{d3} *de la forme* $A_4 A_i A_j^\infty A_k^\infty$.

Par conséquent, pour tout tétraèdre qui n'est pas normal, on a

$$- \arcsin \tau_4 + \sum_1^3 \arcsin \tau_i > 0 .$$

Théorème. *Pour qu'un tétraèdre soit normal, il faut et il suffit que la relation* $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ *soit valable.*

Démonstration. Si le tétraèdre n'est pas normal, on a $\phi_i \neq \frac{\pi}{2}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Par suite, ou bien $\phi_i < \frac{\pi}{2}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, et alors $\sum_1^4 \phi_i$

$< \pi$, suivant la proposition 4, ou bien $\phi_i > \frac{\pi}{2}$ pour un seul indice, soit $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, et alors $\sum_1^4 \phi_i > \pi$, suivant la proposition 5. Donc la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ n'est jamais vraie pour un tétraèdre qui n'est pas normal. Cela démontre le théorème, compte tenu aussi de la proposition 3.

La borne supérieure de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ lorsque $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, par exemple, se réalise sur la frontière du domaine $U' \subset U$ obtenu en adjoignant les conditions

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} \geqq \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} \geqq \frac{\pi}{2}$$

aux relations définissant U. Sans entrer dans les détails, on remarque que l'ensemble des valeurs de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ sur des X_{d2} de la forme $A_4 A_3 A_1 A_2^\infty$ avec

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} > \frac{\pi}{2},$$

admet le maximum

$$2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

qui semble être le supremum cherché.

Toutes les propriétés précédentes sont de caractère local, parce qu'elles se traduisent, d'une façon évidente, par des propriétés des angles que font deux à deux les six droites $d_{ij} = \Pi_k \cap \Pi_l$, en désignant par Π_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, quatre plans issus d'un même point de R^n et parallèles aux faces du tétraèdre.

Cas d'un simplexe quelconque $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$.

Les deux exemples suivants montrent que la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ ne peut pas s'étendre de la même façon à des simplexes de dimension $n \geqq 4$.

a) Le n-simplexe dont toutes les arêtes sont égales à a donne lieu aux relations

$$\omega^2 = \frac{n+1}{2^n} a^{2n}, \quad \tau_i = \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}, \quad \sum_1^{n+1} \phi_i = (n+1) \arcsin \sqrt{\frac{n+1}{2^n}},$$

donc $\sum_1^{n+1} \phi_i < \pi$ pour $n \geqq 4$, et $\sum_1^{n+1} \phi_i \to 0$ pour $n \to +\infty$.

b) Considérant le simplexe défini par n vecteurs orthonormés $\vec{x}_{12}, \vec{x}_{13}, \ldots, \vec{x}_{1,n+1}$, on obtient

$$\omega = 1, \tau_1 = 1, \tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

$$\sum_1^{n+1} \phi_i = \frac{\pi}{2} + n \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

$$\text{donc } \sum_1^{n+1} \phi_i < \pi \text{ pour } n \geqq 4, \text{ et } \sum_1^{n+1} \phi_i \to \frac{\pi}{2} \text{ pour } n \to +\infty.$$

EXERCICES.

1. R^n étant le plus petit espace linéaire contenant les points $a_1, \ldots, a_q$, déterminer le minimum de

$$f(x) = \sum_1^q \mu_i \,|\, x - a_i \,|^{\nu_i}, \quad (\mu_i > 0, \nu_i \geqq 1; i = 1, 2, \ldots, q),$$

lorsque x décrit un sous-espace linéaire de R^n.

2) Dans un tétraède $A_1 A_2 A_3 A_4$, soit $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ le dièdre des deux faces qui se coupent suivant l'arête $A_i A_j$. Démontrer la relation

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_{ij}} = x_{ij} x_{kl} \operatorname{ctg} \alpha_{kl}.$$

En déduire la formule

$$3\omega = x_{12} x_{34} (x_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{34} + x_{34} \operatorname{ctg} \alpha_{12})$$
$$+ x_{13} x_{24} (x_{13} \operatorname{ctg} \alpha_{24} + x_{24} \operatorname{ctg} \alpha_{13}) + x_{14} x_{23} (x_{14} \operatorname{ctg} \alpha_{23} + x_{23} \operatorname{ctg} \alpha_{14}).$$

3. Pour tout tétraèdre normal on a

$$x_{12} x_{34} \operatorname{ctg} \alpha_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{34} = x_{13} x_{24} \operatorname{ctg} \alpha_{13} \operatorname{ctg} \alpha_{24} = x_{14} x_{23} \operatorname{ctg} \alpha_{14} \operatorname{ctg} \alpha_{23},$$
$$x_{12} \operatorname{tg} \alpha_{12} + x_{34} \operatorname{tg} \alpha_{34} = x_{13} \operatorname{tg} \alpha_{13} + x_{24} \operatorname{tg} \alpha_{24} = x_{14} \operatorname{tg} \alpha_{14} + x_{23} \operatorname{tg} \alpha_{23}.$$

4. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trois vecteurs non coplanaires tels que $\vec{a}\vec{b} \neq 0$, $\vec{b}\vec{c} \neq 0$, $\vec{c}\vec{a} \neq 0$. Alors les angles formés par les vecteurs $(\vec{b}\vec{c})\,\vec{a}$, $(\vec{c}\vec{a})\,\vec{b}$, $(\vec{a}\vec{b})\,\vec{c}$ sont tous inférieurs ou tous supérieurs à $\frac{\pi}{2}$. Dans le premier cas on pose

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \arcsin \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|}$$

et dans le second

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pi - \arcsin \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|} .$$

Démontrer la formule

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \phi\big(\vec{a}, \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}), \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})\big)$$
$$+ \phi\big(\vec{b}, \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}), \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})\big) + \phi\big(\vec{c}, \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}), \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a})\big) = \pi$$

(Reçu le 11 avril 1967)

M. Nikias Stavroulakis
105, rue de la Convention
Paris 15e

vide-leer-empty