§2. Théorèmes généraux sur les A.N.R.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

N. B. : $h(X)$ n'est en général pas fermé dans B, le plongement de Kuratowski h étant même un moyen élémentaire de compléter les espaces métriques.

Pour une démonstration, voir Borsuk, chap. 3, § 8.

Remarque. Si X est métrisable compact, il est bien connu qu'il se plonge comme un fermé dans le cube de Hilbert.

Rappelons aussi que tout espace métrisable est paracompact.

§ 2. Théorèmes généraux sur les A.N.R.

Soit X un espace topologique et soit $A \subset X$ un sous-espace.

On dit que A est un rétracte de X s'il existe une application continue $r: X \to A$ telle que $r \circ i = id_A$, $i: A \to X$ étant l'injection naturelle. r est appelé une rétraction de X sur A.

On dit que A est un rétracte de voisinage de X s'il existe un voisinage V de A dans X et une rétraction de V sur A.

On remarque immédiatement que si X est séparé, et si A est un rétracte de voisinage de X, alors A est fermé dans X.

Définition. Soit X un espace métrisable. On dit que X est un rétracte absolu (en anglais « Absolute Retract », d'où l'abréviation A.R.) si chaque fois que l'on a un homéomorphisme h de X sur un sous-espace fermé $h(X)$ d'un métrisable Z alors $h(X)$ est un rétracte de Z.

On dit que X est un rétracte absolu de voisinages (en anglais « Absolute Neighborhood Retract » d'où l'abréviation A.N.R.) si chaque fois que l'on a un homéomorphisme h de X sur un sous-espace fermé d'un métrisable Z alors $h(X)$ est un rétracte de voisinage de Z.

Le théorème suivant donne une définition équivalente pour les A.R. et les A.N.R. (on peut dire grossièrement que c'est parce que l'on veut ce théorème que l'on se restreint aux espaces métrisables dans les définitions précédentes).

Théorème. 1) X est un A.R. si et seulement si chaque fois que l'on a un métrisable Y, un fermé $Y' \subset Y$, et une application continue $f: Y' \to X$, alors f s'étend en une application $F: Y \to X$.

2) X est un A.N.R. si et seulement si chaque fois que l'on a un métrisable Y, un fermé $Y' \subset Y$, et une application continue $f: Y' \to X$, alors f s'étend en une application $F: V \to X$, V étant un voisinage de Y' dans Y.

Preuve. Indiquons comment l'on démontre 2), la démonstration de 1) étant tout à fait analogue.

a) Si X est un A.N.R. d'après le théorème de Kuratowski il existe un plongement h de X dans un Banach B, tel que $h(X)$ soit fermé dans l'enveloppe convexe $C(h(X))$; de plus il existe une rétraction $r: V \rightarrow h(X)$, V étant un voisinage de $h(X)$ dans $C(h(X))$.

D'après le théorème de Dugundji, $h \circ f$ s'étend en une application $F_1: Y \rightarrow C(h(X))$. Soit $\mathcal{U} = F_1^{-1}(V)$. $\mathcal{U}$ est un voisinage de Y' dans Y et $F: h^{-1} \circ r \circ F_1 \mid \mathcal{U}$ est l'extension cherchée.

b) Soit X homéomorphe à un sous-espace fermé de Z. Prenons $Y = Z$, $Y' = X$, $f: Y' \rightarrow X$ l'application identique. Par hypothèse, f s'étend en une application définie sur un vg. de X dans Z et fournit ainsi une rétraction d'un vg. de X dans Z, sur X.

C.q.f.d.

Corollaire. Un rétracte d'un A.R. est un A.R.

On voit donc qu'un E.V.T. localement convexe, métrisable est un A.R., en vertu du théorème de Dugundji. En particulier, un Fréchet, un Banach, un préhilbert, un Hilbert sont des A.R. (Ceci sans hypothèse de séparabilité !)

De même une partie convexe d'un E.V.T. localement convexe métrisable est un A.R. Le cube de Hilbert est un A.R. compact.

Un rétracte d'une telle partie convexe est aussi un A.R., et réciproquement un A.R. est toujours un rétracte d'une partie convexe d'un E.V.T. localement convexe métrisable.

En conséquence, un A.R. est contractible.

Corollaire. Un rétracte de voisinage d'un A.N.R. est un A.N.R. Un ouvert d'un A.N.R. est un A.N.R.

Utilisant les théorèmes de plongements et de voisinages réguliers bien connus, on voit donc, par exemple, qu'une variété différentiable paracompacte de dimension finie ou qu'un polyèdre sont des A.N.R. (Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.)

On voit aussi qu'il existe un voisinage de la sphère d'Alexander $\Sigma^2 \subset S^3$ qui se rétracte sur Σ^2. (En vertu du théorème de van Kampen, il ne saurait y avoir de voisinage qui se rétracte par déformation sur Σ^2.)

Théorème de Hanner (généralisé). Un espace séparé, paracompact qui est localement un A.N.R. est un A.N.R.

Ce théorème est le théorème 5 de Palais.

Le théorème de Hanner disait qu'un métrique qui est une réunion dénombrable d'ouverts A.N.R. est un A.N.R. (Dans la démonstration de Hanner thm. 3.2, l'hypothèse de séparabilité n'est pas essentielle.)

Pour montrer le théorème généralisé de Palais, on utilise le théorème de Smirnov qui affirme qu'un paracompact séparé est métrisable s'il est localement métrisable. Ensuite, grâce à la paracompacité, on se ramène au cas envisagé par Hanner.

On voit donc qu'une variété topologique paracompacte, séparée, modelée sur un E.V.T. localement convexe métrisable est un A.N.R.

De même, on voit qu'un polyèdre localement fini est un A.N.R.

On peut remarquer que le théorème de Palais répond affirmativement à une question posée par Borsuk. (Borsuk, Problem 10.6, chap. IV.)

Une autre propriété intéressante des A.N.R. est la suivante:

Théorème (dû à Kuratowski): Soit X_0 un sous-ensemble d'un compact X. Soit Y un A.N.R. et soit $y_0 \in Y$.

L'espace des applications continues $(Y, y_0)^{(X_0, x_0)}$ de X dans Y, envoyant x_0 sur y_0, muni de la topologie canonique, est un A.N.R.

Pour une démonstration, voir Borsuk [1], chap. 4, § 5.

Produits.

Théorème: 1) Un produit dénombrable d'A.R. est un A.R.

2) Un produit dénombrable d'A.N.R.: $\{ X_i \}_{i \in N}$ parmi lesquels tous les X_i sauf un nombre fini d'entre eux sont des A.R. est un A.N.R.

Un produit dénombrable d'A.N.R. n'est en général pas un A.N.R. comme le montre l'ensemble de Cantor.

Pour une démonstration, voir Borsuk, chap. 4, § 7.

§ 3. Propriétés homotopiques des A.N.R.

Lemme: Soit X un espace métrisable. Soit $A \subset X$ un fermé. Soit $Z = X \times \{ 0 \} \cup A \times I \subset X \times I$. Alors, si V est un vg. de Z dans $X \times I$, il existe une application ρ de $X \times I$ dans V qui est l'identité sur Z.

(La démonstration de ce lemme est élémentaire.)

On déduit alors la proposition suivante:

Proposition: Soit X un métrisable, soit $A \subset X$ un fermé. Soit Y un A.N.R. Soit F: $X \to Y$ une application et soit f_t: $A \to Y$ une homotopie de $F \mid A = f_0$. Alors f_t s'étend en une homotopie F_t: $X \to Y$ telle que $F_0 = F$.