§3. Propriétés homotopiques des A.N.R.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Le théorème de Hanner disait qu'un métrique qui est une réunion dénombrable d'ouverts A.N.R. est un A.N.R. (Dans la démonstration de Hanner thm. 3.2, l'hypothèse de séparabilité n'est pas essentielle.)

Pour montrer le théorème généralisé de Palais, on utilise le théorème de Smirnov qui affirme qu'un paracompact séparé est métrisable s'il est localement métrisable. Ensuite, grâce à la paracompacité, on se ramène au cas envisagé par Hanner.

On voit donc qu'une variété topologique paracompacte, séparée, modelée sur un E.V.T. localement convexe métrisable est un A.N.R.

De même, on voit qu'un polyèdre localement fini est un A.N.R.

On peut remarquer que le théorème de Palais répond affirmativement à une question posée par Borsuk. (Borsuk, Problem 10.6, chap. IV.)

Une autre propriété intéressante des A.N.R. est la suivante:

Théorème (dû à Kuratowski): Soit X_0 un sous-ensemble d'un compact X. Soit Y un A.N.R. et soit $y_0 \in Y$.

L'espace des applications continues $(Y, y_0)^{(X_0, x_0)}$ de X dans Y, envoyant x_0 sur y_0, muni de la topologie canonique, est un A.N.R.

Pour une démonstration, voir Borsuk [1], chap. 4, § 5.

Produits.

Théorème: 1) Un produit dénombrable d'A.R. est un A.R.

2) Un produit dénombrable d'A.N.R.: $\{ X_i \}_{i \in N}$ parmi lesquels tous les X_i sauf un nombre fini d'entre eux sont des A.R. est un A.N.R.

Un produit dénombrable d'A.N.R. n'est en général pas un A.N.R. comme le montre l'ensemble de Cantor.

Pour une démonstration, voir Borsuk, chap. 4, § 7.

§ 3. Propriétés homotopiques des A.N.R.

Lemme: Soit X un espace métrisable. Soit $A \subset X$ un fermé. Soit $Z = X \times \{ 0 \} \cup A \times I \subset X \times I$. Alors, si V est un vg. de Z dans $X \times I$, il existe une application ρ de $X \times I$ dans V qui est l'identité sur Z.

(La démonstration de ce lemme est élémentaire.)

On déduit alors la proposition suivante:

Proposition: Soit X un métrisable, soit $A \subset X$ un fermé. Soit Y un A.N.R. Soit F: $X \to Y$ une application et soit f_t: $A \to Y$ une homotopie de $F \mid A = f_0$. Alors f_t s'étend en une homotopie F_t: $X \to Y$ telle que $F_0 = F$.

Preuve :

F et f_t définissent une application continue de Z dans Y. Comme Y est un A.N.R. cette application s'étend en une application $g: V \to Y$ où V est un certain voisinage de Z dans $X \times I$.

$g \circ \rho: X \times I \to Y$ est alors l'homotopie F_t cherchée.

C.q.f.d.

Corollaire : Un métrique X est un A.R. si et seulement si c'est un A.N.R. contractible.

Preuve :

Nous avons déjà vu qu'un A.R. est un A.N.R. contractible.

Pour démontrer la réciproque, on ne restreint pas la généralité en supposant que X est un fermé dans un convexe Q d'un Banach B.

Soit $h_t: X \to X$ une homotopie telle que:

$$h_0(X) = x_0 \in X \quad \text{et} \quad h_1 = id_X .$$

Soit $H: Q \to X$ l'application constante sur x_0.

Par la propriété d'extension des homotopies,

$$\exists\, H_t: Q \to X \text{ telle que } H_t \mid X = h_t.$$

L'application H_1 est alors une rétraction de Q sur X. Un rétracte d'un A.R. étant un A.R., la démonstration est achevée.

C.q.f.d.

Plusieurs propriétés homotopiques du A.N.R. découlent du fait qu'ils sont des rétractes de voisinages de convexes dans un E.V.T. localement convexe. Par exemple:

Proposition : Un A.N.R. est localement contractible.

Preuve :

On peut supposer que X est un fermé d'un convexe Q d'un Banach B et qu'il existe un ouvert $V \subset Q$ qui se rétracte sur X.

V est localement contractible et l'on voit facilement que tout rétracte d'un espace localement contractible est localement contractible.

C.q.f.d.

N. B. Un espace sera dit localement contractible s'il possède un système fondamental de voisinages contractibles.

Deux applications suffisamment proches d'un métrique dans un A.N.R. sont homotopes. De façon plus précise:

Proposition. Soit E un espace topologique et X un A.N.R. Alors, il existe un recouvrement ouvert $\{ U_\alpha \}_{\alpha \in J}$ de X tel que, si f et g sont deux applications de E dans X qui sont α-proches, alors elles sont homotopes.

Rappel. On dit que f et g sont α-proches, si $\forall x \in E$, il existe un ouvert U_α tel que $f(x)$ et $g(x) \in U_\alpha$.

Preuve :

A nouveau, considérons X comme un fermé dans un convexe Q d'un Banach B; et soit $V \subset Q$ un ouvert se rétractant sur X.

V étant localement convexe, on voit immédiatement que la conclusion de la proposition est vraie pour V.

X étant un rétracte de V, il est facile de voir que la conclusion reste vraie pour X.

C.q.f.d.

Définition. On dit qu'un espace A est dominé par un espace B s'il existe deux applications $f: A \to B$, $g: B \to A$, telles que $g \circ f$ soit homotope à id_A.

Proposition. Un A.N.R. est toujours dominé par un complexe simplicial (et donc par un C.W. complexe).

Avant de donner une idée de la démonstration, définissons ce que l'on entend par « complexe simplicial ».

C'est un C.W.-complexe pour lequel les modèles de cellules fermées sont les simplexes standards et les applications attachantes sont des applications simpliciales injectives.

Idée de la démonstration (cf. Palais [1], thm. 14).

On commence par démontrer le lemme suivant:

Lemme. Soit X paracompact. Soit $\{ W_\alpha \}_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de X. Alors, il existe un recouvrement ouvert $\{ 0_\beta \}_{\beta \in B}$ de X (plus fin que $\{ W_\alpha \}$), localement fini, tel que si $\bigcap_{i=1}^{n} 0_{\beta i} \neq \varnothing$, alors $\bigcap_{i=1}^{n} 0_{\beta i} \subset W_\alpha$, pour un certain $\alpha \in A$.

(Palais, lemme 6.2.)

Une fois en possession de ce lemme, on poursuit la démonstration de la façon suivante:

Comme la relation « être dominé par » est transitive, on ne restreint pas la généralité en supposant que X est un ouvert d'un convexe contenu dans un E.V.T., localement convexe, métrisable.

On choisit un recouvrement ouvert $\{ W_\alpha \}_{\alpha \in A}$ de X par des ouverts convexes.

On choisit un recouvrement ouvert $\{ 0_\beta \}_{\beta \in B}$ de X, satisfaisant la conclusion du lemme.

Soit K le complexe simplicial associé au recouvrement $\{ 0_\beta \}_{\beta \in B}$; on considérera K comme réalisé géométriquement dans $\mathbf{R}^{(B)}$, les sommets de K étant les vecteurs de la base standard.

Comme d'habitude, une partition de l'unité, associée au recouvrement $\{ 0_\beta \}$ fournit une application f de X dans K.

Si, pour tout $\beta \in B$, on choisit un point $x_\beta \in 0_\beta$, on définit une application linéaire de $\mathbf{R}^{(B)}$ dans l'E.V.T., dont la restriction g à K a son image dans X, car si une intersection $\bigcap_{i=1}^{n} 0_{\beta i} \neq \varnothing$, l'enveloppe convexe de sa réunion $\subset W_\alpha$, et donc dans X.

Pour une raison analogue $g \circ f$ est homotope à id_X.

C.q.f.d.

N. B.: La même preuve montre que si X est séparable, il est dominé par un C.W.-complexe dénombrable et que s'il est compact il est dominé par un C.W. complexe fini.

§ 4. Relations entre A.N.R. et C.W. complexes

Rappelons pour commencer quelques définitions et un théorème.

Soient X et Y deux espaces topologiques connexes et soit $f: X \to Y$ telle que $f: \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ soit un isomorphisme, $\forall n$. On dit que f est alors une équivalence d'homotopie faible.

Par opposition, une équivalence d'homotopie (usuelle) est parfois appelée équivalence d'homotopie forte.

Théorème: Si X et Y sont deux espaces topologiques connexes dominés par des C.W. complexes, une équivalence d'homotopie faible entre X et Y est nécessairement une équivalence d'homotopie forte.

(J. H. C. Whitehead, thm. 1.)