

JACQUES HADAMARD, SA VIE ET SON ŒUVRE CALCUL FONCTIONNEL ET QUESTIONS DIVERSES

Autor(en): **Lévy, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41524>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

JACQUES HADAMARD, SA VIE ET SON ŒUVRE CALCUL FONCTIONNEL ET QUESTIONS DIVERSES

par Paul LÉVY

I

Jacques Hadamard, qui devait devenir un des plus grands savants de sa génération, naquit à Versailles le 8 décembre 1865. Son père était professeur de latin au Lycée Louis-le-Grand; sa mère contribuait aux ressources du ménage en donnant des leçons de piano, et eut notamment Paul Dukas comme élève. Jacques était l'aîné de deux enfants. Il fit ses études au Lycée Louis-le-Grand, dont il fut un des plus brillants élèves, obtenant plusieurs prix de latin et de grec au Concours général. Il ne semblait pas d'abord destiné à la science. Dans l'allocution par laquelle, le 7 janvier 1936, il répondit à ses amis qui le félicitaient, avec un mois de retard, pour son soixante-dixième anniversaire, il raconte que dans les petites classes il ne réussissait pas à résoudre les problèmes d'arithmétique, et qu'ayant appris qu'on faisait des mathématiques à l'Ecole normale, section des sciences, il déclara à son père: « Oh ! alors, ce n'est pas là que j'irai ». Mais il rencontra bientôt Launay, « le maître qui devait lui faire entrevoir des horizons nouveaux », et, quand il fut bachelier, c'est avec regret que son père le vit se tourner vers les sciences. Sa vie de lycéen se termina par un double et brillant succès: il fut reçu premier à la fois à l'Ecole Polytechnique, et à l'Ecole normale, section des sciences. A la première de ces écoles, il avait obtenu un nombre de points qu'aucun candidat n'avait jamais atteint, ce qui prouve bien qu'il excellait dans toutes les matières sur lesquelles portait le concours. Il entra à l'Ecole normale, ce dont on ne saurait s'étonner.

Dans l'allocution déjà mentionnée, il parle avec émotion des maîtres qu'il y connut, et d'abord de Tannery: « Les jeunes gens d'aujourd'hui, dit-il, ne peuvent pas se douter de ce que fut pour notre génération la lumineuse figure de Jules Tannery...; pour nous, ce fut le guide scientifique, intellectuel, moral. » De l'enseignement d'Emile Picard, relatif à « la mécanique, notamment à l'hydrodynamique et aux tourbillons, mais aussi à plusieurs autres théories de physique mathématique et même de géométrie

infinitésimale », il dit : « Dans cet enseignement, le plus magistral, à mon avis, que j'aie entendu, où il n'y a pas un mot de trop et où aucun ne manque, où, tous les détails accessoires étant à la fois rigoureusement traités et remis à leur place, l'essentiel de la difficulté et du moyen employé pour en triompher apparaît en pleine lumière. » Il admirait aussi la clarté des leçons d'Hermite, de Darboux, d'Appell, de Goursat. Il mentionne encore l'influence qu'eut indirectement sur lui l'œuvre de Volterra, et celle de ses conversations avec Pierre Duhem. Chose curieuse, Poincaré eut d'abord moins d'influence sur lui : « Son œuvre, dit-il, semblait d'un quart de siècle en avance sur l'état de la science. Nous l'admirions, mais comme une chose lointaine qui nous dépassait et à laquelle nous n'osions point toucher. Il en fut ainsi jusqu'à l'intervention de Painlevé qui, le premier, montra que continuer Poincaré n'était pas au-dessus des forces humaines. »

Agrégé en 1887, il resta encore un an à l'École normale, puis fut nommé professeur au Lycée Buffon. C'est sans doute au cours des années où il fut ainsi en contact avec les élèves des lycées qu'il fut conduit à s'intéresser aux méthodes d'enseignement et aux programmes ; c'est peut-être aussi à cette époque qu'il conçut le plan de ses *Leçons de géométrie élémentaire*, qu'il devait rédiger et publier environ dix ans plus tard, et qui eurent une grande influence sur les étudiants de ma génération. Ce qui est certain, c'est que, tout en assumant avec succès les multiples obligations d'un professeur de lycée (nous le savons par M. Fréchet, qui fut son élève), il put achever en trois ans les travaux dont la publication révéla au monde la puissance de son génie. Il y eut d'abord, en 1892, sa thèse sur les fonctions définies par une série de Taylor ; puis, la même année, son mémoire sur les fonctions entières et en particulier sur une fonction considérée par Riemann, fut couronné par l'Académie (Grand Prix des Sciences mathématiques). L'Académie avait mis au concours la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée. On s'attendait à voir le prix attribué à Stieltjes, qui avait annoncé un important résultat sur ce sujet. Mais il ne présenta aucun mémoire, s'étant sans doute rendu compte qu'il n'avait pas réellement démontré le résultat annoncé, et ce fut Hadamard qui obtint le prix. Deux autres de ses mémoires devaient être couronnés par l'Académie (Prix Bordin, 1896 et Prix Vaillant, 1907). Pour l'ensemble de son œuvre mathématique, il devait obtenir trois autres prix (Prix Poncelet, 1898 ; Prix Petit d'Ormoy, 1901 et Prix Estrade-Delcros, 1908).

C'est encore en 1892 qu'il épousa M^{lle} Louise-Anna Trével, qui devait être pendant soixante-huit ans sa compagne des bons et des mauvais jours.

Il partit avec elle pour Bordeaux, où après sa Thèse il avait été nommé maître de conférences. Il y retrouva Duhem, par qui il fut informé des progrès de la physique mathématique. Il prenait une part active à la vie de l'Université, et, de 1894 à 1900, plusieurs de ses notes furent publiées par la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Son premier mémoire publié hors de France parut en 1896 dans les *Acta mathematica*. Mais ses travaux les plus importants paraissaient dans des recueils parisiens.

Il revint à Paris en 1897, étant nommé maître de conférences à la Sorbonne, et fut en même temps chargé par Maurice Lévy de le suppléer au Collège de France. L'année 1912 marqua en quelque sorte l'apogée de sa carrière. Il devint à la fois professeur au Collège de France (ce qui l'obligea à abandonner la Sorbonne), et à l'École Polytechnique, où il succédait à Jordan. Enfin le 8 décembre, le jour même de son quarante-septième anniversaire, il était élu à l'Académie des sciences, au fauteuil de Poincaré, mort cinq mois plus tôt. Nul plus que lui n'était digne de succéder à cet extraordinaire génie. Il y a lieu de noter que ce n'était pas sa première candidature. En 1900, il n'avait pas voulu se présenter contre Painlevé à la succession de Darboux devenu Secrétaire perpétuel. Mais après la mort d'Hermite (janvier 1901) il n'hésita pas à se porter candidat et rédigea une notice sur ses travaux scientifiques. Il avait 35 ans et on ne peut qu'admirer l'importance et la variété des travaux qu'il avait publiés en dix ans. Malgré cela, il ne fut présenté par la section de géométrie qu'en troisième ligne, après Georges Humbert et Goursat et ex aequo avec Emile Borel. Humbert fut élu; mais en 1912, Hadamard l'emportait sur Goursat et Borel.

En 1914, la guerre survint, qui devait bouleverser sa vie. Il avait eu vingt-deux années de vie parfaitement heureuse. Sa femme et lui avaient eu et élevé cinq enfants: trois fils, Pierre, Etienne et Mathieu, et deux filles, Cécile et Jacqueline. Une grave maladie de sa femme, dont la guérison avait paru miraculeuse, n'avait été qu'un souci passager. L'année 1916 mit fin à ce bonheur. La guerre lui enleva d'abord Pierre, puis Etienne, atteint par une balle dès son arrivée sur le front. Dans son allocution du 7 janvier 1936, Hadamard parla « d'une suite d'années magnifiquement épanouies, depuis l'année 1892 à partir de laquelle il a connu la beauté de la vie, jusqu'en 1916, à partir de laquelle nulle joie n'a plus pu être pour lui vraiment pure ». La mort d'Etienne fut sans doute le coup le plus dur. Il espérait un brillant avenir pour ce jeune homme remarquablement doué. Il me dit un jour: « Vous savez que je m'y connais; eh bien, ce que j'ai fait en mathématiques n'est rien à côté de ce qu'il aurait pu faire, s'il avait vécu. »

Pourtant, après la guerre, son extraordinaire vitalité le sauva. Il s'intéressait à trop de choses pour boudier la vie. Nous parlerons plus loin de sa curiosité toujours en éveil, et de l'étonnante variété de ses activités. Pour le moment il s'agit de sa carrière mathématique. A partir de 1920, il accepta de succéder à Appell comme professeur à l'Ecole centrale. Suivant l'exemple de son prédécesseur, il y fit un cours assez élémentaire; il ne s'agissait pas de former des mathématiciens. Mais le programme de l'Ecole Polytechnique était plus ambitieux. Il y fit un cours d'un niveau très élevé, mais où les difficultés étaient signalées et expliquées d'une manière qui faisait l'admiration de ses élèves. Nous regrettons de ne pouvoir reproduire ici le magnifique éloge que fit de ce professeur hors pair, au cours d'une cérémonie dont nous parlerons plus loin, Louis Armand, de l'Académie française, qui avait été son élève de 1924 à 1926.

Mais c'est au Collège de France, où le petit nombre des auditeurs permet un contact presque impossible à l'Ecole Polytechnique, qu'il montra le mieux quel animateur il pouvait être. Il y créa un séminaire qui fut le premier de ce genre qui ait existé en France. Ces séminaires sont aujourd'hui nombreux, et chacun porte sur un chapitre très restreint de la science. Le programme de celui d'Hadamard n'excluait aucune partie des mathématiques. Au début de l'année, il avait établi une liste des livres ou mémoires qu'il désirait voir analyser; il mettait dans cette liste, nous dit-il un jour, tout ce qui l'amusait. Cela allait de la géométrie à la théorie des fonctions, et des problèmes concrets relatifs à des équations particulières aux problèmes abstraits de l'analyse fonctionnelle. Bref, presque tout, dans le domaine mathématique, l'intéressait. A la rentrée, il réunissait ses collaborateurs et on se partageait la tâche. Puis chacun venait à son tour exposer les résultats de son travail. Pendant ces séances, il m'arrivait de ne pas suivre un exposé trop ardu, et j'admirais que, pour lui, rien ne fût difficile. Toujours attentif, il intervenait souvent pour préciser un point mal expliqué par l'orateur, et si, par hasard, quelque chose lui échappait, aucune fausse honte ne l'empêchait de demander des explications complémentaires.

C'est avec regret que nous le vîmes prendre sa retraite en 1937. D'après la législation en vigueur au début du siècle, il aurait pu enseigner jusqu'à l'âge de 75 ans. Un abaissement de l'âge de la retraite l'obligea à cesser son enseignement trois ans plus tôt, quand il était encore en pleine activité. La seconde guerre survint peu après. Après la défaite de 1940, il se réfugia à Toulouse avec sa famille; tous purent peu après quitter la France. Hélas ! tandis qu'Hadamard, sa femme et sa fille Jacqueline trouvaient un refuge

aux Etats-Unis, pour rejoindre plus tard l'Angleterre où il pouvait travailler pour la défense nationale, un nouveau deuil frappait cette famille déjà si éprouvée. Mathieu Hadamard, qui s'était engagé dans l'armée de la France libre, tombait à son tour, vingt-huit ans après ses deux aînés.

Si on songe que, peu après la fin de la guerre, Hadamard atteignit l'âge de 80 ans, on admire qu'il soit resté encore actif. Pendant la guerre, il avait donné un cours à l'Université Columbia, et publié plusieurs articles dans des revues américaines ou anglaises, et notamment deux notices nécrologiques sur Emile Picard, et une grande étude sur la psychologie de l'invention. Rentré à Paris, il ne renonça pas au travail. De 1947 à 1959, on trouve encore une vingtaine de publications d'inégale importance. Si certaines furent des traductions françaises de textes parus d'abord en anglais, ou des rééditions, on trouve en 1951 un exposé nouveau de 134 pages sur le rôle de la géométrie non euclidienne dans la théorie des fonctions automorphes, publié en U.R.S.S. En 1959, il ajoutait encore des compléments à la traduction par sa fille Jacqueline de son essai sur la psychologie de l'invention. Mais en 1960, la mort de sa femme fut un coup dont il ne se releva pas. Il devait être encore cruellement frappé l'année suivante par la mort accidentelle d'un petit-fils. Il eut pourtant une dernière joie, en recevant, cinquante ans après son élection à l'Académie des sciences, une délégation de ladite académie venue pour lui remettre la médaille d'or destinée à commémorer cet anniversaire. Mais quelle différence entre cette réunion, et celle où, sept ans plus tôt, ses amis avaient célébré son quatre-vingt-dixième anniversaire et à l'occasion de laquelle le ministre de l'Instruction publique l'avait fait grand-croix de la Légion d'honneur ! M^{me} Hadamard n'y était plus, et lui-même était trop fatigué pour répondre comme il l'aurait voulu aux allocutions de MM. Julia, Louis de Broglie et Denjoy. Il mourut le 17 octobre 1963, et ce furent alors M. Fréchet et M. Daniel Mayer, président de la Ligue des droits de l'homme, qui lui rendirent un dernier hommage, en présence de nombreux amis réunis autour de son cercueil.

Ce dernier hommage ne fut pas réellement le dernier. Deux mois plus tard, M. Fréchet lisait devant l'Académie des sciences une notice sur sa vie et son œuvre. D'autres notices, dues à MM. G. Julia, J. P. Kahane, P. Lévy, S. Mandelbrojt, L. Schwartz et J. Nicolétis, parurent en 1964 dans différents recueils. En novembre 1965, deux des nombreuses sociétés étrangères dont il était membre honoraient sa mémoire: la Royal Society de Londres publiait une notice rédigée par miss Mary L. Cartwright, et à Rome, le 20 novembre, à une séance de l'Academia Nazionale dei Lincei, le profes-

seur B. Segre lisait une notice rédigée par F. Tricomi, empêché de la lire lui-même. Rappelons à ce sujet qu'Hadamard était à notre connaissance membre, non seulement de ces deux sociétés et de la Royal Society d'Edimbourg, mais aussi des académies de Bruxelles, de Liège, d'Amsterdam, de Washington, de Boston, de Buenos Aires, de Rio de Janeiro, de Calcutta, et de New Delhi. Ajoutons qu'il était membre actif de toutes ces académies et sociétés, et au cours de ses nombreux voyages, s'était rendu dans toutes les villes citées ci-dessus. Le 13 janvier 1966, l'Ecole polytechnique célébrait avec un léger retard le centième anniversaire de sa naissance: Paul Lévy et Laurent Schwartz parlèrent de son œuvre mathématique, tandis que le général Mahieux, MM. Louis de Broglie, Maurice Roy (président de l'Académie des Sciences pour 1966), Paul Montel, F. Tricomi, S. Mandelbrojt et Louis Armand (président du Conseil de perfectionnement de l'Ecole polytechnique) rappelaient d'autres aspects de son activité. Le présent volume est un hommage à cette grande mémoire; ce ne sera sûrement pas le dernier; le plus bel hommage lui sera rendu par ceux qui continueront son œuvre.

II

Hadamard s'est intéressé à presque tous les chapitres des mathématiques. On peut toutefois, dans ses travaux, distinguer quatre centres d'intérêt principaux et des questions diverses. Ces centres d'intérêt sont les fonctions analytiques ou quasi analytiques et leurs applications à l'arithmétique, les équations différentielles et leurs applications tant à la mécanique qu'à l'étude des lignes géodésiques d'une surface, les équations aux dérivées partielles et leurs applications à la physique mathématique, enfin le calcul des variations et le calcul fonctionnel. Les trois premières parties de l'œuvre d'Hadamard devant être exposées par MM. Mandelbrojt, Malliavin et Malgrange, nous n'avons à parler que de la quatrième et de quelques questions diverses.

Mentionnons d'abord un fait qui prouve bien l'étendue des connaissances d'Hadamard. Après la mort de Poincaré (juillet 1912), il rédigea en deux ou trois mois deux notices sur l'œuvre de cet illustre savant; elles parurent avant la fin de l'année, l'une dans la *Revue de métaphysique et de morale*, et aussi dans la *Revue du mois*, fondée par Emile Borel, l'autre dans les *Acta mathematica*. On sait que Poincaré avait renouvelé toutes les branches des mathématiques. Peu de savants pouvaient se vanter de bien connaître l'ensemble de cette œuvre immense. Il fallait être Hadamard

pour oser entreprendre, et mener à bien en si peu de temps, la tâche d'en exposer l'ensemble. Si nous précisons que ces notices avaient, l'une 42 pages, l'autre 85, on se rendra compte qu'il ne s'agissait pas d'exposés superficiels. D'ailleurs, pour certaines questions, notamment à propos des équations différentielles, il avait continué l'œuvre de Poincaré, et la connaissait bien. Mais les idées essentielles des autres chapitres de cette œuvre sont aussi bien mises en évidence dans ces remarquables exposés.

Dans la liste des œuvres d'Hadamard, publiée dans les *Selecta* qui lui ont été offerts pour son soixante-dixième anniversaire, on trouve encore des notices sur Maurice Lévy, l'auteur du célèbre traité de statique graphique, sur l'aspect mathématique de l'œuvre de Duhem, sur Painlevé, sur Emile Picard et sur George David Birkhoff¹⁾. On voit, par ces notices et comptes rendus, à quel point il s'intéressait, non seulement à tous les aspects des mathématiques, mais à leurs applications tant à l'art de l'ingénieur qu'à la physique.

C'est par ses premiers travaux sur les fonctions analytiques, qui seront exposés par M. Mandelbrojt, que le génie d'Hadamard s'est révélé en 1892.

Le premier mémoire dont nous ayons à parler est celui où il détermina le module maximum d'un déterminant D d'ordre n dont tous les éléments ont leurs modules au plus égaux à un nombre positif C . Comme il y a $n!$ termes de modules au plus égaux à C^n , celui de D est au plus $C^n n!$. Mais, sauf si $n = 1$ ou 2 , il est impossible que tous les termes aient le même argument, et ce maximum ne saurait être atteint. Hadamard établit en 1893 que le véritable maximum est $C^n \sqrt{n^n}$, et précisa dans quelles conditions il peut être atteint. Il montra en particulier que, les cas $n = 1$ et 2 étant encore exceptés, il ne peut être atteint par un déterminant réel que si n est multiple de 4.

Il est souvent arrivé dans l'histoire de la science qu'un théorème mathématique ait des applications que ne soupçonnait pas son inventeur. C'est ainsi que l'étude des coniques par les anciens Grecs a permis à Kepler de découvrir les lois du mouvement des planètes, et que les travaux de Ricci et Levi Civita sur le calcul différentiel absolu ont permis à Einstein de déduire les conséquences pratiques du principe de la relativité généralisée. De même le théorème d'Hadamard sur les déterminants a permis à Fred-

¹⁾ Cette liste n'est d'ailleurs pas complète: les notices d'Hadamard sur ses propres travaux, un important compte rendu de la thermodynamique de Gibbs et la préface à mes *Leçons d'Analyse fonctionnelle* n'y figurent pas. Nous mentionnerons plus loin d'autres omissions.

holm d'établir la convergence des séries à l'aide desquelles il a résolu sa célèbre équation intégrale.

Ce théorème n'est d'ailleurs pas sa seule contribution à l'algèbre. Un mémoire sur l'élimination le conduit à des démonstrations élémentaires de théorèmes établis par Humbert, Appell et Goursat à l'aide des fonctions fuchsiennes et abéliennes. Dans un autre mémoire, il signale une lacune dans la démonstration classique de l'impossibilité de la résolution de l'équation du cinquième degré. Deux autres mémoires portent sur les conditions de décomposition des formes. Tout cela de 1894 à 1897. Il reviendra à l'algèbre en 1911 pour rédiger, en collaboration avec M. Kûrschak, l'important chapitre de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (éd. française) consacré à la théorie des corps et domaines algébriques.

Mentionnons encore une extension des théorèmes de Paul Dubois-Reymond sur la croissance des fonctions. C'est Hadamard, et non Paul Dubois-Reymond, qui a démontré qu'on peut toujours définir une série convergente (divergente) qui converge (diverge) moins rapidement que toutes les séries d'une suite dénombrable de séries convergentes (divergentes) données, et que, si $f(n)$ est une fonction positive et indéfiniment croissante de n , on peut toujours trouver une série divergente $\sum u_n$ et une série convergente $\sum v_n$ telles que $0 < u_n < v_n f(n)$.

Mentionnons enfin, pour en finir avec ces questions diverses, un mémoire de 1906 sur les transformations ponctuelles, où il étudie les conditions d'unicité d'une telle transformation, et un mémoire de 1910 sur l'indice de Kronecker, qui généralise cet indice, et qui en même temps, dans le cas du plan, apporte une simplification à la démonstration du théorème de Jordan d'après lequel une courbe plane fermée sans point double divise le plan en deux régions.

III

Arrivons maintenant à un ensemble de travaux beaucoup plus important, concernant le calcul des variations et le calcul fonctionnel. On sait qu'Hadamard a donné le nom de fonctionnelle à une expression: $U[x(t)]$ qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction $x(t)$ dans un intervalle (fini ou infini). Le calcul fonctionnel, au sens de Volterra et Hadamard, est l'étude de ces fonctionnelles (nous n'avons pas à parler ici de l'analyse générale, créée par M. Fréchet et E. H. Moore, et qu'on appelle souvent analyse fonctionnelle; il est regrettable que la terminologie de M. Fréchet n'ait pas été conservée). Volterra s'était d'abord placé au point de vue

géométrique, en étudiant les fonctions de lignes. En ramenant l'étude des fonctions de lignes ou de surfaces à l'étude analytique des fonctionnelles, Hadamard a réalisé un progrès analogue à celui que Descartes a réalisé en créant la géométrie analytique.

Dans sa notice de 1912, il indique que les progrès de l'analyse et sa tendance à l'énoncé de problèmes de plus en plus généraux, devaient nécessairement conduire à l'analyse fonctionnelle. Après les fonctions particulières connues depuis longtemps, Leibniz et ses successeurs avaient étudié des fonctions de plus en plus générales d'une ou de plusieurs variables. Il était fatal qu'on étudie un jour les fonctions d'une infinité de variables, et, comme une fonction continue dans un intervalle fini y est bien définie par ses coefficients de Fourier, les fonctions de ces coefficients sont en réalité des fonctionnelles. Avant Volterra, Carlo Bourlet et surtout S. Pincherle avaient étudié la relation entre une fonction analytique $f(x)$ définie par une série entière $\sum a_n x^n$, et une autre fonction $g(x)$ dont la forme dépend de tous les a_n ; $g(x)$ est donc en réalité une fonctionnelle qui dépend de la fonction $f(\cdot)$ et accessoirement du paramètre x . Le mérite de Volterra fut d'abord de s'être débarrassé du paramètre accessoire x , ensuite et surtout d'avoir compris que l'étude générale des fonctionnelles ne devait pas dépendre d'un mode particulier de représentation de la fonction dont elles dépendent. Son premier résultat fondamental montre bien l'intérêt de ce point de vue. Traduit dans le langage d'Hadamard, c'est que, si une fonctionnelle U dépend des valeurs de $x(t)$ dans un intervalle (a, b) , et si on donne à U une variation infinitésimale $\delta x(t)$, la variation correspondante de U est, sous des conditions assez peu restrictives, de la forme

$$\delta U = \int_a^b U'_x \delta x(t) dt, \quad (1)$$

l'erreur étant, comme dans la définition d'une différentielle, un infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Le coefficient $U'_x = U'_x(t)$, qu'on appelle la dérivée fonctionnelle de U , est naturellement en général une fonctionnelle de $x(\cdot)$, dépendant en outre de t .

Il était évident que la forme (1) de Volterra ne s'applique pas à n'importe quelle fonctionnelle. Si $U = x(\tau)$ (τ étant un point donné dans (a, b)),

alors $\delta U = \delta x(\tau)$. De même, si U est le maximum de la fonction x , supposée continue dans (a, b) , et si ce maximum n'est atteint qu'en un point τ , on a $\delta U = \delta x(\tau)$. S'il est atteint en plusieurs points τ_i , c'est le plus grand des

$\delta x(\tau_i)$ qui intervient, et δU cesse d'être une fonctionnelle linéaire. Si on considère une famille de fonctions $x(t) = f(t, \lambda)$ dépendant d'un paramètre λ , et si $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ est une fonction continue de t et λ , U devient une fonction $F(\lambda)$ qui est en général dérivable. Mais s'il arrive que pour une valeur λ_0 de λ le maximum de $x(t)$ soit atteint pour deux (ou plus de deux) valeurs distinctes de t , alors, pour $\lambda = \lambda_0$, $F(\lambda)$ a une dérivée à droite et une dérivée à gauche qui sont en général distinctes.

Hadamard fut le premier à remarquer que la forme de Volterra n'est pas assez générale, et utilisa cette remarque de deux manières différentes. D'une part, considérant que l'accroissement infinitésimal de U n'a le caractère d'une différentielle que s'il est une fonctionnelle linéaire de $\delta x(t)$, il chercha la forme générale de ces fonctionnelles, et montra que n'importe quelle fonctionnelle linéaire U d'une fonction $x(t)$ est limite d'intégrales de la forme

$$I_n = \int f_n(t) x(t) dt. \quad (2)$$

La représentation d'une fonctionnelle linéaire ainsi obtenue a le défaut de n'être pas canonique: elle donne une infinité de représentations différentes pour une même fonctionnelle. Mais ce résultat provoqua de nouvelles recherches qui mirent en évidence le fait qu'on ne peut obtenir de représentations canoniques qu'en précisant le champ fonctionnel E dans lequel U est supposé bien défini et borné, et par suite continu. En prenant pour E l'ensemble C des fonctions continues dans $[a, b]$, Fr. Riesz obtint l'expression canonique

$$U = \int_a^b x(t) dF(t), \quad (3)$$

$F(t)$ étant à variation bornée dans $[a_-, b_+]$. Ensuite, prenant pour E l'ensemble L_2 des fonctions mesurables et de carrés sommables dans (a, b) , Fr. Riesz lui-même et M. Fréchet, indépendamment l'un de l'autre, obtinrent la représentation canonique

$$U = \int_a^b f(t) x(t) dt \quad [f \in L_2(a, b)]. \quad (4)$$

Bien entendu dans (3), $F(t)$ est défini à une constante près, et, dans (4), $f(t)$ peut être modifié arbitrairement sur n'importe quel ensemble de mesure nulle.

Revenons aux fonctionnelles linéaires continues dans C . Si la fonction $F(t)$ qui intervient dans (3) n'est pas absolument continue, cela veut dire qu'il y a des points singuliers, formant un ensemble de mesure nulle, tels que U dépende spécialement des valeurs de $x(t)$ en ces points. Si on exclut l'existence de tels points, l'expression (3) se réduit à la forme (4), $f(t)$ étant seulement une fonction quelconque dans L_1 , et non dans L_2 . S'il y a un seul point singulier τ , U étant une fonctionnelle linéaire continue dans C , on est conduit à écrire

$$U = \int_a^b f(t) x(t) dt + cx(t). \quad (5)$$

la fonction $f(t)$ pouvant avoir en τ une discontinuité qui oblige à remplacer l'intégrale par sa valeur principale au sens d'Hadamard ¹⁾.

Ces circonstances se présentent presque toujours lorsqu'on étudie la variation d'une fonctionnelle non linéaire U . Même si aucune valeur de t ne joue un rôle particulier dans sa définition, la dérivée fonctionnelle $U'_x(t)$ n'est pas en général une constante, et on peut, comme Hadamard l'a fait remarquer dès 1902, s'attendre à ce que $\delta U'_x(t)$ dépende spécialement de $\delta x(t)$. Si la fonctionnelle U est continue d'ordre zéro et qu'aucun point ne joue un rôle particulier dans sa définition, on peut s'attendre à ce que $\delta U'_x(t)$ ait la forme que j'ai appelée normale

$$\delta U'_x(t) = \int_a^b U''_{xx_1}(t, t_1) \delta x(t_1) dt_1 + U''_{x_2} \delta x(t), \quad (6)$$

ce qui, en supposant $\delta^2 x(t) = 0$, donne pour $\delta^2 U$ la forme normale

$$\delta^2 U = \int_a^b \int_a^b U''_{xx_1}(t, t_1) \delta x(t) \delta x_1(t) dt dt_1 + \int_a^b U''_{x_2}(t) [\delta x(t)]^2 dt. \quad (7)$$

Volterra avait négligé le second terme sans s'apercevoir que les fonctionnelles qu'il considérait comme générales ne sont en réalité que des solutions de l'équation $U''_{x_2} = 0$, et cru que l'équation de Laplace ($\Delta u = 0$) se généralisait par l'équation

¹⁾ Dans des applications importantes, t est une abscisse curviligne sur une courbe fermée. S'il n'en est pas ainsi, et si a et b sont finis, il faut naturellement en général introduire des termes en $\delta x(a)$ et $\delta x(b)$.

$$\int_a^b U''_{xx_1}(t, t) dt = 0$$

[alors que $U''_{xx_1}(t, t_1)$ est une fonction mesurable de deux variables dont l'intégrale sur la ligne $t = t_1$ ne peut jouer aucun rôle]. En réalité, comme cela résulte des travaux de Gâteaux et des miens, l'équation de Laplace généralisée est

$$\int_a^b U''_{x^2}(t) = 0 \quad (8)$$

Ces travaux, comme ceux de Gâteaux et de M. Fréchet qui ont étudié les solutions de l'équation $U''_{x^2} = 0$ auxquelles s'appliquent les formules de Volterra, apparaissent un peu comme des développements de la courte note d'Hadamard (*Bull. Soc. math.*, 30, 1902, pp. 40-43).

IV

Si Hadamard s'intéressait aux théories générales (il s'est en particulier beaucoup intéressé à l'analyse générale de Fréchet et Moore), cela ne l'empêchait pas d'attacher une grande importance aux applications. Dans sa notice de 1912, il fait remarquer que, dans ses travaux sur les fonctions entières, il s'était déjà inspiré des principes du calcul fonctionnel: il avait en effet étudié les relations entre trois fonctions, celle qui caractérise la croissance d'une fonction entière, celle qui définit la décroissance des coefficients de la série entière qui la représente, et celle qui définit le nombre de ses zéros de modules $\leq r$. Mais en 1907, un sujet mis au concours par l'Académie, l'étude de l'équilibre des plaques élastiques encastées, lui donna l'occasion d'appliquer plus précisément les idées de Volterra, en considérant les fonctions de Green comme fonctions du contour. On sait que ces fonctions dépendent, dans le cas du plan, d'un contour C et de deux points intérieurs A et B . Il en considéra spécialement trois: la fonction de Green proprement dite, $g(A, B)$, relative à l'équation de Laplace et au problème de Dirichlet; la fonction de Neumann $\gamma(A, B)$, relative à la même équation de Neumann; enfin la fonction de Green d'ordre deux, $G(A, B)$, dont dépend l'équilibre des plaques élastiques encastées. Il dut d'abord préciser la définition de $\gamma(A, B)$ que Neumann n'avait, pour chaque A fixe, défini qu'à une constante près. Il put le faire de manière que cette fonction soit, comme les deux autres, symétrique en A et B . Supposant

le contour C rectifiable, de sorte qu'un point M de C peut être défini par son abscisse curviligne s , et définissant la déformation du contour par le déplacement δn de M , supposé normal à C et compté positivement vers l'intérieur, il obtint les équations

$$\delta g(A, B) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dg(A, M)}{dn} \frac{dg(M, B)}{dn} \delta n ds, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta \gamma(A, B) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \frac{d\gamma(A, M)}{ds} \frac{d\gamma(M, B)}{ds} \right. \\ \left. + \frac{1}{lR} [\gamma(A, M) + \gamma(M, B)] - \frac{1}{l^2} \right\} \delta n ds, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\delta G(A, B) = \frac{1}{8\pi} \int_C \Delta_M G(A, M) \Delta_M G(M, B) \delta n ds, \quad (11)$$

$2\pi l$ désignant la longueur C du contour et R son rayon de courbure en M . Il fit remarquer que, si δn est de signe constant, ces formules entraînent l'inégalité

$$[\delta g(A, B)]^2 \leq \delta g(A, A) \delta g(B, B)$$

et des inégalités analogues relatives à $\gamma(A, B)$ et $G(A, B)$. Il indiqua aussi l'extension de ces formules au cas de l'espace. Il montra ensuite que ces trois équations se ramènent à la forme unique

$$\delta \psi(A, B) = \int_C \psi(A, M) \psi(M, B) \delta n ds. \quad (12)$$

Il suffit en effet de poser

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(A, B) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 g(A, B)}{dn_A dn_B}, \quad \psi_2(A, B) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 \gamma(A, B)}{ds_A ds_B}, \\ \psi_3(A, B) = \frac{1}{8\pi} \Delta_A \Delta_B G(A, B) \end{aligned} \right\} (13)$$

pour avoir trois solutions de l'équation (12). Les deux premières n'ont d'ailleurs de sens que si on se borne à considérer une famille particulière de contours se rétrécissant à partir de C , de manière que les symboles $\frac{d}{ds}$ et $\frac{d}{dn}$ aient un sens aux points A et B . J'ai fait remarquer ultérieurement que, pour $g(A, B)$, on évite cet inconvénient en considérant le tenseur

$$T_1(A, B) = \frac{1}{2\pi} \text{grad}_A \text{grad}_B g(A, B), \quad (14)$$

qui est bien défini sans qu'on ait à choisir des directions en A et en B , et vérifie une équation analogue à l'équation (12).

Dans sa notice de 1912, Hadamard a bien voulu rappeler que j'ai indiqué dans ma thèse ce qu'il appelle la raison profonde du fait que la même équation (12) se rencontre ainsi dans trois problèmes distincts: c'est qu'elle est presque la seule qui soit complètement intégrable. D'une manière précise, si une équation de la forme

$$\delta\psi(A, B) = \int_c f[\psi(A, B), \psi(A, M), \psi(M, B), A, B, M] \delta n ds \quad (15)$$

est complètement intégrable, un changement de la fonctionnelle inconnue la ramène à la forme (12). Si j'ai rappelé ce résultat, c'est pour dire une fois de plus ce que je dois à Hadamard. Quant à la fin de l'année scolaire 1909-1910, ayant suivi son cours au Collège de France, je lui fis observer qu'il n'avait pas soulevé le problème de l'intégrabilité des équations (9) à (12), il me répondit qu'il avait l'intention de l'étudier, mais que, puisque j'en avais eu l'idée, il me laissait le champ libre. Il m'abandonnait ainsi un magnifique sujet de recherches, qui devint celui de ma thèse.

V

Le calcul des variations, qui avait eu un grand développement bien avant les travaux de Volterra, apparaît aujourd'hui comme un chapitre du calcul fonctionnel, celui où l'on étudie les maximums et minimums des fonctionnelles. Mais les précurseurs, et notamment Euler et Lagrange, n'avaient considéré que des fonctionnelles particulières, représentables par des intégrales telles que

$$\int_a^b f(x, y, y') dx,$$

ou des intégrales plus générales (simples ou multiples) où peuvent figurer des dérivées d'ordres plus élevés de la fonction inconnue (d'une ou plusieurs variables). Euler avait formé une équation différentielle qui, jointe à des conditions aux limites, donne en principe la fonction qui réalise l'extremum cherché. Mais leurs théories manquaient de rigueur. La recherche des

conditions suffisantes de l'extremum était surtout difficile, et, malgré les travaux de Jacobi, Legendre, Weierstrass et Hilbert, il restait beaucoup à faire lorsqu'Hadarnard s'occupa de la question à l'occasion de son cours du Collège de France. Ses recherches aboutirent à un gros livre qui parut en 1910. Il serait difficile, dans cet exposé didactique, de distinguer ce qui lui est dû, si nous n'y étions pas aidés par sa notice de 1912, dont nous allons reproduire un extrait :

« Dans le cas de l'extremum libre, lorsqu'on l'examine au point de vue de la condition de Jacobi, particulièrement dans les cas douteux où les deux extrémités de l'arc d'intégration sont des foyers conjugués, la discussion est, en général, rendue très aisée, même dans ces cas exceptionnels, par une considération géométrique simple dérivant de la construction de Darboux-Erdmann : l'extremum est conservé ou non suivant que les deux arcs d'extrémale que cette condition conduit à tracer forment un angle saillant (c'est-à-dire tournant sa pointe à l'opposé de l'arc tracé) ou rentrant.

» De plus, si l'extremum cesse au moment où la seconde extrémité de l'arc d'intégration coïncide avec le foyer conjugué de la première, j'ai montré qu'il est rétabli lorsqu'on impose à la ligne variée un voisinage du second ordre avec la ligne primitive, absolument, d'ailleurs, comme dans l'exemple de Scheeffer. Cette circonstance tend donc à apparaître dans les cas limites, au lieu que dans tous les autres (lorsque l'intégrale porte sur des dérivées premières) le voisinage du second ordre n'entraîne, à cet égard, aucune conséquence que n'implique déjà celui du premier.

» La même méthode donne une démonstration différente de celle de Poincaré, et d'ailleurs très simple, des conditions établies dans les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* pour l'extremum d'une intégrale prise le long d'une ligne fermée.

» La condition de Legendre-Weierstrass, contrairement à celle de Jacobi, devient prépondérante lorsque la ligne variée a un grand nombre de sinuosités. En mettant ce fait en évidence, j'ai pu, du même coup, tenir compte très simplement des courbes sans tangentes, le long desquelles la valeur de l'intégrale ne peut être définie que moyennant une extension convenable donnée au sens de ce mot. La démonstration de l'existence de l'extremum, lorsqu'on fait entrer en ligne de compte de telles courbes en même temps que celles qui ont une tangente continue, a coûté de grands efforts et des analyses parfois très compliquées, tant qu'on a voulu se servir des propriétés particulières de chaque mode de définition généralisée qu'on peut appliquer à l'intégrale. J'ai constaté au contraire, qu'elle est intuitive lorsqu'on part

des propriétés nécessairement communes, par la nature même des choses, à toutes les définitions dont il s'agit. »

Nous ne pouvons pas reproduire les dix pages qu'Hadamard consacre dans sa notice à ses travaux sur le calcul des variations. Elles ne sauraient remplacer la lecture de son livre, qui seule peut donner une idée de la perfection à laquelle il avait amené ce calcul. Le passage que nous avons choisi montre bien que, pour résoudre un problème délicat, il n'hésite pas à en modifier l'énoncé. Le problème était insoluble, parce que mal posé; mieux posé, il devient résoluble, et Hadamard sait bien imaginer les méthodes nécessaires. Il n'y a sans doute pas, dans son calcul des variations, un théorème saillant, facile à monter en épingle, comme il y en a dans d'autres parties de son œuvre, et spécialement dans celle dont M. Mandelbrojt doit rendre compte. On peut plutôt dire que le calcul des variations était un édifice dont Euler, Lagrange, Jacobi et Weierstrass avaient bâti la charpente. Mais elle manquait de solidité. Malgré les efforts de Weierstrass, les véritables conditions de l'extremum étaient mal connues. Même pour un problème simple, comme celui de la courbe plane reliant deux points donnés qui en tournant autour d'une droite de son plan engendre la plus petite aire possible, les cas où le minimum est réalisé par une courbe régulière, solution de l'équation d'Euler, n'avaient pas été définis avec précision. Hadamard survint, examina avec une rare perspicacité les difficultés qui subsistaient, et laissa un ouvrage achevé là où il n'avait trouvé qu'une ébauche.

VI

Hadamard devait fatalement s'intéresser au calcul des probabilités. C'est au Congrès de Bologne, en 1928, qu'il présenta une communication sur le battage des cartes et sa relation avec la mécanique statistique, qui donna une nouvelle impulsion à l'étude des chaînes de Markov. Pour le problème particulier du battage des cartes, il rappelle d'abord les résultats antérieurement établis par divers auteurs, notamment Poincaré et Markov, et constate qu'ils ne se sont pas occupés du cas singulier. Rappelons que pour exclure ce cas, du moins pour ce qu'il appelle le problème b , il faut et il suffit que, pour h et k quelconques et pour tout n assez grand, on ait $p_{h,k}^n > 0$, $p_{h,k}^n$ étant la probabilité que la carte qui occupe initialement le rang h arrive au rang k après n répétitions du geste fait pour battre les cartes. Alors, pour n infini, $p_{h,k}^n$ tend vers $\frac{1}{r}$, r étant le nombre des cartes.

Hadamard considère ensuite le cas d'une variable x , comprise dans un intervalle (a, b) , et qu'une transformation T comportant un élément aléatoire transforme en une variable y située dans le même intervalle. La loi de probabilité de y est définie par la densité de probabilité $f(x, y)$, ou, si elle n'est pas absolument continue, par la fonction de répartition $F(x, y)$. Hadamard considère surtout le premier cas et observe que, si la densité de probabilité $f_n(x, y)$ obtenue en partant de x par l'opération T^n tend pour n infini vers une limite $\varphi(x)$, il résulte de la loi de récurrence de la suite des f_n que cette limite vérifie l'équation intégrale

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) \varphi(x) dx,$$

qui est une équation de Fredholm, homogène. Il introduit le paramètre λ de Fredholm dans cette équation et dans l'équation associée, obtenue en remplaçant $f(x, y)$ par $f(y, x)$, et, observant que le cas singulier est lié à l'existence de racines du dénominateur $D(\lambda)$ de Fredholm de la forme $\lambda = e^{i\alpha}$ (α réel $\neq 0$, mod. 2π), discute les conditions de réalisation de ce cas singulier. Il montre ensuite l'analogie qui existe entre cette recherche d'une répartition limite, et spécialement celle des cas où elle est indépendante de la valeur initiale x , et les problèmes ergodiques de la mécanique statistique.

Ce travail est surtout important par l'impulsion qu'il a donnée à la théorie des processus de Markov, qui est aujourd'hui un des principaux chapitres du calcul des probabilités. Il est possible qu'il ait contribué à inspirer le mémoire fondamental de Kolmogorov sur les méthodes analytiques du calcul des probabilités (1931). Il est en tout cas certain qu'il a inspiré une suite de beaux travaux de M. Fréchet, tant sur le cas continu que sur le cas discontinu, et qu'Hadamard lui-même a contribué à ces études par un nouveau mémoire rédigé en collaboration avec M. Fréchet (1933). En 1938, ce dernier, se limitant au cas d'un système n'ayant qu'un nombre fini d'états possibles et aux chaînes discontinues, a publié un exposé de la question qui semble définitif. Peu après, Kolmogorov abordait l'étude des systèmes ayant une infinité dénombrable d'états possibles. L'étude du cas continu, où l'on introduit une infinité continue d'états possibles, tout en remplaçant la suite discrète de variables aléatoires X_n par une fonction $X(t)$ du temps t , a donné lieu à des travaux si nombreux, aux Etats-Unis, en U.R.S.S., au Japon, et aussi en France et dans d'autres pays d'Europe, que nous ne pouvons pas les énumérer ici. On se demande si, dès 1928,

Hadamard avait eu l'intuition de ce prodigieux développement. Il est certain, en tout cas, qu'il avait compris l'importance du principe ergodique, tant en calcul des probabilités qu'en mécanique statistique; le souvenir de conversations remontant à cette époque me permet de l'affirmer.

VII

Cet exposé est loin d'être complet. Non seulement nous n'avons pas empiété sur les chapitres dont l'exposé sera fait par d'autres élèves d'Hadamard, mais, dans la partie de ses œuvres mathématiques dont nous avons à parler, nous n'avons mentionné que ce qui nous a paru très important. Il nous reste à parler de son activité à côté, ou même tout à fait en dehors, du domaine des mathématiques.

Nous avons déjà dit qu'il s'était intéressé à la mécanique et à la physique, mais que ce n'était pas à nous de développer l'ensemble de ces travaux, qui se rattachent aux exposés que doivent faire MM. Malgrange et Malliavin. Nous devons toutefois mentionner une note de 1898 sur la forme de l'espace, qui fait penser que, comme Poincaré à la même époque, il était bien près de découvrir la relativité. En 1924, il revient sur cette question pour expliquer par suite de quelles circonstances il est passé à côté de cette découverte. Dans l'intervalle, il avait publié un compte rendu du livre de Larmor, *Aether and matter*, et une note sur l'interprétation théorique des raies spatiales et une autre sur la détermination du champ électrique. J'ai souvenir aussi d'avoir lu de lui un compte rendu de la thermodynamique de Gibbs, oublié dans la liste de ses œuvres publiée en 1935. Mais ces rares notes ne donnent pas une idée de la manière dont, informé tant par ses relations avec Langevin et avec Jean Perrin que parce qu'il était à l'affût de toutes les idées nouvelles, il suivait les progrès de la physique.

Nous avons dit aussi qu'il s'était toujours intéressé à l'enseignement des sciences. Sans revenir sur ses exposés didactiques (leçons de géométrie, cours d'analyse), nous devons mentionner de nombreuses interventions dans la discussion des programmes (1903, les sciences dans l'enseignement secondaire; 1923, la réforme de l'enseignement secondaire; 1926, à propos de la réforme du programme de mathématiques spéciales; de 1930 à 1934, de nombreux articles sur ces questions dans l'*Œuvre* et dans l'*Enseignement scientifique*). S'il s'est surtout occupé des programmes des sciences mathématiques et physiques, il s'est aussi intéressé à ceux des sciences naturelles, auxquelles il aurait voulu donner une place plus grande dans les petites

classes, celles dont les élèves ne sont en général pas encore aptes à comprendre un raisonnement abstrait, mais peuvent s'intéresser à l'observation des plantes et à leur développement. Rappelons à ce sujet qu'il s'était spécialement intéressé aux fougères (dont il avait une belle collection) et aux champignons.

Il s'est aussi toujours beaucoup intéressé à tous les aspects de la philosophie des sciences, et à la discussion de leurs fondements. Il me faut d'abord rappeler son intervention dans les discussions qui ont suivi l'introduction par Zermelo de ce qu'on a appelé l'axiome du choix. J'ai toujours été surpris de voir que des savants tels que H. Lebesgue, Emile Borel et Baire ont pu ne pas comprendre cet axiome et contester sa valeur. En réalité, ce n'était pas vraiment un axiome nouveau, et ce sont eux qui voulaient restreindre la portée de la logique classique en prétendant qu'elle ne s'appliquait qu'aux objets qu'on peut en quelque sorte toucher du doigt. Cette restriction, qui n'intervient pas dans les raisonnements, ne saurait être nécessaire à la validité des conclusions. Hadamard ne s'y est pas trompé, et, dans un échange de lettres qui furent publiées en 1905 par la Société mathématique de France, fut le seul à reconnaître la valeur des raisonnements de Zermelo.

Ce ne fut pas sa seule intervention dans le domaine de la philosophie des sciences. Je me souviens d'une note sur les fondements du calcul des probabilités, qui est oubliée dans le répertoire de 1935 et dont je ne retrouve pas la référence. Il y soulignait le rôle de deux notions intuitives, celle de l'égalité de deux probabilités et celle de probabilité négligeable. Ces deux notions admises, tout le reste n'est que construction mathématique. Dans la liste de 1935, je relève d'abord en 1900, une note sur l'induction et la généralisation en mathématique, et en 1902, un compte rendu d'un livre de Bouvier : *la méthode mathématique en économie politique*. En 1906, il publie dans la *Revue générale des sciences* trois articles sur la logistique et l'induction complète, sur les principes de la théorie des ensembles, et sur la logistique et la notion de nombre entier. En 1926 il préface le livre de Gosset sur les fondements des mathématiques. Tout ce qui concerne la valeur de la science et la discussion des principes l'intéresse au plus haut point, et cette tendance de son esprit apparaît dans son enseignement. Il n'indique pas seulement les démonstrations, mais aussi la philosophie des démonstrations, et, à ce sujet, il faut noter qu'il s'intéresse aux théories très générales autant, et même sans doute plus, qu'aux faits particuliers. Aussi est-il tout de suite familiarisé avec l'analyse générale, créée par

M. Fréchet et E. H. Moore, et qui a eu depuis un extraordinaire développement.

Un des problèmes philosophiques dont il s'est le plus occupé est la psychologie de l'invention, spécialement dans le domaine mathématique. Dès 1901, il publie un article sur la fameuse bosse des mathématiques. Il lit tout ce que mathématiciens et philosophes ont écrit sur ce sujet, ses idées mûrissent, et c'est seulement quand, pendant la seconde guerre mondiale, il est réfugié aux Etats-Unis, qu'il rédige en anglais son célèbre *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, qui paraîtra à Princeton en 1945, et dont la traduction française, due à sa fille Jacqueline Hadamard, ne paraîtra qu'en 1959. Dans cet essai, on admire autant l'érudition de l'auteur que le développement de ses idées personnelles. Nous ne pouvons mentionner que les plus importantes. D'abord il étudie longuement les cas dans lesquels, par une illumination subite, un savant se trouve brusquement en possession de la solution d'un problème qui l'avait longtemps arrêté. Il cite l'exemple bien connu de la découverte des fonctions fuchsiennes par Poincaré, et reproduit et commente les pages dans lesquelles l'illustre savant raconte qu'une succession d'illuminations subites lui a permis de franchir les différents obstacles situés sur le chemin de sa découverte. Hadamard, après avoir cité d'autres exemples, qui ne sont pas tous du domaine des mathématiques (il cite Gauss, Mozart, et Paul Valéry), se déclare d'accord avec Poincaré qui explique ce phénomène par un travail inconscient ou subconscient qui le précède. Mais ce travail ne se produit pas dans n'importe quel cerveau. Il ne peut se produire qu'à la suite d'un travail conscient, au cours duquel l'attention du chercheur s'est concentrée sur un problème; il y a sans doute une sorte de polarisation des cellules cérébrales vers lui, tout ce qui effleure le conscient ou le subconscient lui est rapporté, et une idée qui peut aider à sa solution ne peut y arriver sans éveiller aussitôt l'attention consciente du chercheur. C'est l'illumination. Chez Poincaré, elle peut ne durer qu'un instant, et il peut reprendre aussitôt la conversation interrompue. Mais elle est enregistrée et sera exploitée ensuite à loisir. Le travail conscient, qui a été nécessaire au début, l'est aussi pour l'achèvement de sa découverte.

Hadamard ne met pas en doute le rôle de ce mystérieux inconscient. Il distingue d'ailleurs, entre le conscient et l'inconscient, le subconscient, qui est en quelque sorte en marge de la conscience. Ainsi, quand nous regardons un paysage, nous portons notre attention consciente sur une partie de ce paysage; mais l'ensemble contribue à l'impression que nous

avons, et ce qui s'y passe peut brusquement attirer notre attention. Le subconscient plus profond est évidemment mystérieux, mais il est difficile de contester son rôle, qui a été admis « depuis l'époque de saint Augustin et par des maîtres tels que Leibnitz ». Hadamard s'étonne de le voir discuter par certains penseurs, notamment le philosophe Albert Fouillée, et réfute leurs arguments.

Il étudie d'autre part longuement le rôle des images dans la pensée en général et spécialement dans la découverte. Il dit que chez lui des images visuelles vagues sont souvent d'un grand secours; elles l'aident à préciser le raisonnement, et parce qu'elles sont vagues, elles ne peuvent pas le tromper, comme le ferait une figure précise mais mal faite. Il insiste surtout sur le rôle des mots. On sait que certains philosophes prétendent que, sans mots, il n'y aurait pas de pensée. Hadamard fut particulièrement surpris quand il vit cette idée soutenue (en 1887) par Max Müller, « le célèbre philologue et orientaliste ». Il l'est plus encore par certains penseurs pour qui la pensée implique l'image visuelle des mots imprimés. Sans nier le rôle des mots qui, résumant une idée, servent de « relais », et permettent à la pensée d'aller de l'avant, Hadamard combat ces exagérations. Il me semble qu'aux arguments qu'il donne on peut en ajouter d'autres, assez concluants: la thèse de Max Müller impliquerait que les animaux ne pensent pas, que les enfants ne pensent que quand ils sont en âge de parler, ce qui est manifestement faux. Chez l'adulte même il est certain qu'une émotion ou une sensation précèdent les mots qui les expriment; dans le domaine intellectuel, l'impression que lui fait un raisonnement faux n'implique pas qu'il ait trouvé les mots qui le réfutent. Reconnaissons avec Hadamard que, sans le langage qui sert de relais, la pensée humaine ne serait pas devenue ce qu'elle est, que notamment les découvertes d'un homme de génie seraient restées inconnues, mais aussi que les bonds en avant se font souvent sans l'aide des mots. Reconnaissons aussi avec lui que ces discussions prouvent qu'il y a deux sortes d'esprit, les uns qui pensent surtout par mots et s'imaginent (sans doute à tort) ne penser que par mots, les autres chez qui la pensée précède les mots, et que les partisans de ces deux théories opposées se regardent avec étonnement sans pouvoir bien se comprendre.

Cette idée, de deux sortes d'esprit qui s'opposent et ne peuvent pas se comprendre, se retrouve quand, après Poincaré, il oppose les esprits surtout logiciens à ceux qui sont surtout intuitifs. Il rappelle à ce sujet les discussions qu'il a eues avec H. Lebesgue et E. Borel au sujet de l'axiome du choix; l'avenir lui a donné raison; la science utilise cet axiome sans se soucier des

objections des savants qui contestaient sa valeur, objections que ni Hadamard, ni moi-même, n'avons pu comprendre. Il rappelle aussi, dans le même ordre d'idées, l'hostilité de F. Klein vis-à-vis des idées de G. Cantor; cette hostilité, sans réussir à arrêter les progrès de la science, a nui à la carrière de Cantor, et a même empêché la publication de ses travaux dans les périodiques allemands.

Pour Hadamard, la logique sert à consolider les conquêtes de l'intuition, et permet de convaincre ceux qui manquent d'intuition. L'éclair d'intuition ne convainc que celui qui en est illuminé. Mais c'est celui-là seul qui fait avancer la science; l'intuition est le principal instrument des découvertes. Hadamard cherche à la définir, à la caractériser. Qu'est-ce qui guide le chercheur vers les problèmes intéressants, et vers les méthodes qui permettent de les résoudre? Qu'est-ce qui, souvent, lui donne une impression de certitude, au sujet d'énoncés qu'il ne sait pas encore démontrer? Pour Hadamard, la réponse n'est pas douteuse. Un sentiment esthétique joue le plus souvent un rôle essentiel. D'abord l'intérêt qu'on éprouve naturellement pour une question est le meilleur stimulant de la recherche; le travail qu'on fait sur commande, ou pour gagner de l'argent, est rarement fécond (ce qui ne veut pas dire qu'une aide pécuniaire aux savants soit inutile; mais il s'agit de la réserver à ceux qui ont la vocation de la recherche). Si ensuite on a une idée, c'est souvent un sentiment esthétique qui porte à la croire exacte; une théorie vraie a souvent un caractère d'élégance que n'a pas une théorie fautive. Ce sentiment d'élégance a beau être subjectif, les exemples de Poincaré, d'Hadamard, et de beaucoup d'autres, prouvent qu'il est le meilleur guide pour la recherche. J'oserai ajouter que je l'ai souvent constaté moi-même, et je pense que, si certains savants le nient, c'est qu'ils mettent une certaine coquetterie à ne donner que des démonstrations achevées et à cacher le processus de leurs découvertes.

VIII

L'extraordinaire activité de cet homme si complet qu'était Hadamard ne se limitait pas aux sciences et à la philosophie. Il fut un grand voyageur, et ce n'étaient pas seulement les congrès internationaux et les cours qu'il donnait dans différentes universités qui l'entraînaient en U.R.S.S., aux Etats-Unis, au Brésil, en Inde ou en Chine. Il aimait les voyages, les grands spectacles de la nature, et aussi la recherche des fougères et des champignons. C'est la recherche des fougères qui lui fit faire de nombreux

kilomètres à cheval à travers les forêts du Brésil, accompagné par sa femme qui trouva ce voyage bien fatigant. Lui-même était infatigable; les Alpes françaises et suisses n'avaient pas de secret pour lui, et aucune ascension ne l'effrayait. M. Montel, qui l'accompagna un jour dans la montée de la vallée du Rhône vers le glacier d'Aletsch, raconte qu'il refusa de faire les haltes horaires habituelles, disant qu'on ne se reposerait qu'arrivé au but.

Revenons au domaine intellectuel. Il est à peine besoin d'ajouter qu'il avait une étonnante culture tant littéraire qu'artistique. En musique, il ne se contentait pas d'écouter, mais maniait l'archet, et avait organisé un quatuor dont il était le premier violon. Chez ses collaborateurs, nous a dit sa fille, il cherchait plus le sentiment de la musique qu'une technique impeccable. Einstein se joignait à eux quand il venait à Paris, et, dans la conversation de ces deux savants, il était plus souvent question de musique que de relativité.

Il nous reste à parler des qualités humaines d'Hadamard. M. Paul Montel, le doyen de ses amis survivants, en a parlé avec émotion dans la cérémonie du 13 janvier 1966, mentionnée plus haut. Hadamard était lié d'amitié tant avec des hommes de lettres, comme Bédier, qu'avec beaucoup des plus grands savants de sa génération, et spécialement Jean Perrin et Paul Langevin, qui ne sont plus là pour dire ce qu'il fut pour ses amis. Mais ses élèves, heureusement encore nombreux, sont tous d'accord pour exprimer à la fois la plus grande admiration pour son enseignement, et la plus grande reconnaissance pour l'intérêt qu'il leur portait et le temps qu'il leur consacrait, malgré ses nombreuses occupations. Dans sa notice lue devant l'Académie, M. Fréchet, qui l'eut en cinquième au Lycée Buffon comme professeur de mathématiques, raconte que, nommé peu après à Bordeaux, Hadamard, « dans la floraison de ses magnifiques travaux, trouvait le temps de (lui) écrire pour (lui) poser des problèmes, et aussi pour se livrer à un commentaire de (sa) solution, commentaire dont la portée s'étendait bien au-delà de celle-ci. »

Au sujet de l'aspect humain de l'activité d'Hadamard, nous ne pouvons faire mieux que citer quelques extraits de la notice de M. Fréchet: « A côté du savant, il y avait l'homme. Il aimait l'humour et m'avait lu un malicieux poème de sa façon sur une candidature à l'Académie. Mais, ce qui le caractérisait surtout, c'était sa générosité de cœur.

» Et ici, pour illustrer cette appréciation, je veux m'appuyer sur les citations d'illustres personnalités. Dans le domaine scientifique, Lebesgue le montrait comme un homme qui sait admirer, qui parle avec enthousiasme

des découvertes des autres. Et Hadamard lui-même écrit: « Rien ne peut être » plus précieux pour le savant que de se sentir dépassé dans les chemins » mêmes qu'il a commencé à tracer ».

» Mais Hadamard a étendu son activité à d'autres domaines que les sciences... Et, comme le disait le ministre Roustan: « Il a toujours consacré « une belle part de son activité à la cause de la Justice et du Droit. »¹⁾

» C'est ainsi qu'il est entré dans le Conseil de la Ligue des droits de l'homme, où, comme le rappelait à ses funérailles M. Daniel Mayer, président de cette ligue, il a opiniâtement signalé et flétri tous les manquements aux droits de l'homme survenus à sa connaissance. Il n'a consenti à s'en retirer que lorsqu'il a eu l'assurance que sa fille, M^{lle} Jacqueline Hadamard, prendrait sa place, non seulement nominalement, mais avec la même ardeur.»

Après avoir parlé, comme nous l'avons dit plus haut, de ses relations avec Hadamard, M. Fréchet ajoute: « Ces relations n'étaient pas limitées à sa personne. J'ai toujours reçu de M^{me} Hadamard l'accueil le plus bienveillant et le plus aimable. Et je ne voudrais pas terminer cette notice sans rappeler la part qu'elle a eue dans les succès de son mari, l'aidant de toute manière dans la partie matérielle associée à toute œuvre scientifique, cherchant à réduire ou à éliminer les fatigues de ses voyages où elle n'a pas hésité à l'accompagner fréquemment, en Chine comme en Amérique.

» Sachons donc unir le nom de M^{me} Hadamard et ceux de ses enfants au souvenir admiratif et affectueux que nous conserverons de Jacques Hadamard. »

Nous ne pouvons que nous associer à cette conclusion.

1) Ajoutons à ce que va dire M. Fréchet que, parent d'Alfred Dreyfus, il fut un des premiers à être assuré de l'innocence de cet officier injustement condamné, et qu'il n'hésita pas à se jeter dans la mêlée, notamment au procès de Rennes, en 1899.