V. Autres ordres. Mérites respectifs de ces ordres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

V. Autres ordres. Mérites respectifs de ces ordres

La théorie des permutations nous dit qu'il y a 3 ! = 6 ordres possibles des 3 blocs (a), (b), (c). Nous en avons déjà examiné 3. Il me paraît pédagogiquement peu indiqué de séparer les blocs (b) (nombres premiers) et (c) (divisibilité); ceci exclut donc les ordres (b), (a), (c) et (c), (a), (b). Reste l'ordre (a), (c), (b): il consiste à démarrer sur la partie élémentaire des congruences (c.à.d. la définition de Z/nZ et de sa structure d'anneau), puis à suivre l'ordre indiqué dans les 1) et 2) du § IV; à la fin de ce 2) on peut donner l'énoncé complet concernant l'identité de Bezout (y compris la caractérisation des éléments inversibles de Z/aZ); quant à l'énoncé relatif à Z/pZ pour p premier, il vient à la fin du 3). Ainsi l'ordre (a), (c), (b) ressemble assez à l'ordre (c), (b), (a) du § IV; mais il a le désavantage que des considérations sur les congruences viennent interrompre des propriétés uniquement multiplicatives.

Restent ainsi à comparer les ordres (a), (b), (c) décrit dans le § II, (b), (c), (a) du § III, et (c), (b), (a) du § IV. Le premier a l'avantage de l'économie; aucune démonstration n'y est difficile; la connaissance préalable de l'unique décomposition en facteurs premiers permet de donner un exposé à la fois très simple et complet de la théorie du pgcd et du ppcm (on obtient à la fois l'existence du pgcd ou du ppcm, et le moyen de les calculer à partir de décompositions en facteurs premiers). Le désavantage de cet ordre est que le théorème « Z/pZ est un corps lorsque p est premier » y reçoit une démonstration ad hoc, particulière à Z; il n'est donc pas généralisable à d'autres anneaux principaux.

L'ordre (b), (c), (a) du § III a encore l'avantage dû au fait que l'unique décomposition en facteurs premiers vient avant la théorie du pgcd et du ppcm. Mais il a le désavantage que la démonstration d'unicité de E. Zermelo est un peu trop ingénieuse, et risque de passer par-dessus la tête de la plupart des élèves. Comme l'ordre du § II, il a aussi le désavantage de ne pas se prêter à la généralisation aux autres anneaux principaux.

Enfin l'ordre (c), (b), (a) du § IV a le grand avantage d'introduire l'importante notion d'idéal, et de se prêter à la généralisation aux anneaux principaux; on peut, en compléments ou en exercices, étudier la divisibilité dans d'autres anneaux principaux, par exemple l'anneau des polynômes à une variable sur un corps, l'anneau des nombres $a + b\sqrt{2}$ $(a, b \in Z)$, ou l'anneau des « entiers de Gauss » $a + bi$ $(a, b \in Z, i^2 = -1)$; ce dernier est particulièrement intéressant, car il permet d'étudier très élégamment la représentation des entiers comme sommes de deux carrés. Un professeur soucieux de pureté pourra même utiliser la variante esquissée dans le § IV: du fait que Z est un anneau principal, il ne retiendra d'abord que l'énoncé « l'intersection $aZ \cap bZ$ de deux idéaux principaux est un idéal principal mZ »; il aura ainsi le ppcm, en déduira le pgcd, puis l'unique décomposition en facteurs premiers; cette variante a l'avantage d'être immédiatement généralisable, non seulement aux anneaux principaux, mais à tous les anneaux factoriels; en effet, jointe à l'existence d'une décomposition en facteurs « irréductibles », la principalité des intersections de deux idéaux principaux caractérise les anneaux factoriels. Mais les désavantages de cet ordre sont qu'il est nettement moins économique que celui du § II, que certaines démonstrations dans la théorie (c) du pgcd et du ppcm y sont un peu subtiles (encore plus subtiles si on utilise la variante ci-dessus), que l'existence du pgcd et du ppcm y est séparée de leur calcul à partir de décompositions en facteurs premiers, et qu'enfin la finitude des anneaux Z/nZ n'y est pas utilisée (ce qui prive les élèves d'occasions de mieux comprendre les propriétés des ensembles finis).

Que peut-on maintenant conclure de cette discussion ? L'ordre du § III, avec la démonstration de E. Zermelo, paraît un peu inférieur aux deux autres. Quant à ceux-ci, la simplicité du premier me paraît équilibrer la généralité du dernier; le choix entre eux dépendra donc des préférences du professeur, de son tempérament, du niveau et de l'état d'esprit de ses élèves.

P. Samuel
Ecole normale supérieure de jeunes filles
Boulevard Jourdan, 48 (Paris, 14e)

(Reçu le 21 avril 1967)

vide-leer-empty