

L'ENSEIGNEMENT PAR LES PROBLÈMES

Autor(en): **Polya, George**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41546>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'ENSEIGNEMENT PAR LES PROBLÈMES

par GEORGE POLYA

Dans ce qui suit, je m'intéresse en premier lieu à l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires des Etats-Unis (high schools); cependant, pour que cet article puisse contribuer à une discussion internationale, je mets l'accent sur les points communs à toutes les écoles de niveau secondaire, c'est-à-dire les écoles pour les jeunes de 12 à 18 ans, dans n'importe quel pays, par exemple les lycées et gymnases européens. Certaines restrictions dans l'application de cet article, qui sont dans la nature des choses, seront soigneusement précisées au moment voulu.

1. UN ART, NON PAS UNE SCIENCE

Evidemment, l'enseignement n'est pas une science exacte avec une terminologie précise largement admise. C'est pourquoi les buts et les méthodes d'enseignement ne peuvent pas être discutés d'une manière adéquate sans exemples concrets, décrits avec soin et longuement. Comme, cependant, la place attribuée à cet article exclut les exemples détaillés, je dois renvoyer, pour de plus amples explications et des illustrations appropriées, à mes livres, disponibles en plusieurs langues ^A.

Enseigner est une action humaine complexe, dépendant dans une large mesure des personnalités en cause et des conditions locales. Aujourd'hui, il n'y a pas de science de l'enseignement à proprement parler, et il n'y en aura guère dans le futur prévisible. En particulier, il n'existe pas de méthode d'enseignement qui soit indiscutablement la meilleure, comme il n'existe pas d'interprétation la meilleure d'une sonate de Beethoven. Il y a autant de bons enseignements qu'il y a de bons professeurs: l'enseignement est plus un art qu'une science. (Cela n'exclut pas, bien sûr, que l'enseignement peut bénéficier d'une attention judicieuse apportée aux expériences et théories psychologiques.)

A) 1. *How to solve it*, second edition, Doubleday, 1957.

2. *Mathematics and plausible reasoning*, vol. 1 and 2, Princeton University Press, 1954

3. *Mathematical discovery*, vol. 1 and 2, Wiley, 1962/65.

Traductions (lorsqu'elles sont en préparation au moment de la lecture des épreuves, le nombre est entre parenthèses): allemand: 1, 2, 3; arabe: 1; espagnol: 1, 2; français: 1, 2, 3; hébreu: 1; hongrois: 1, 3; italien (1); japonais: 1, 2, 3; polonais: 1; roumain: 1, 2; russe: 1, 2; serbe: 1.

Quoiqu'il en soit, ce qui suit est une présentation non dogmatique de mes convictions personnelles. Je serais heureux si quelque directeur ou professeur à l'esprit ouvert y trouve des points qui conviennent aux conditions de son enseignement ou à son goût personnel.

2. LES BUTS

Les buts de l'enseignement, les sujets à enseigner et les méthodes à utiliser dépendent des conditions qui prévalent dans tel ou tel endroit, à tel ou tel moment : ils devraient satisfaire les besoins de la communauté et sont limités par les possibilités en personnel enseignant et en argent. (Ils dépendent en fait de l'estimation plus ou moins éclairée de ces conditions par les autorités locales.)

Cependant, une discussion sur l'enseignement ne peut avoir de sens que si l'on définit au préalable le but à atteindre. Ma conviction personnelle est que la tâche principale de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire est d'apprendre aux jeunes gens à PENSER. Tout ce que je dirai dans la suite découle de cette conviction fondamentale. Si le lecteur ne peut partager entièrement mon opinion, j'espère qu'il le peut cependant dans une certaine mesure, qu'il peut considérer comme un but subordonné mais majeur ce qui pour moi est le but principal, et il pourra alors trouver dans la suite d'utiles suggestions.

Naturellement, je n'oublie pas les autres buts essentiels — je pense simplement qu'ils sont compatibles avec ce que je regarde comme le but principal. De telles tâches sont : de préparer les élèves au cours de physique, si un tel cours fait partie du programme de l'école ; de préparer les futurs ingénieurs et élèves des Facultés de Sciences. En ce qui concerne les futurs mathématiciens, un point est très important : ils ne devraient pas être dégoûtés par un enseignement mal dirigé. Cependant, l'introduction de sujets qui n'ont d'intérêt que pour les futurs mathématiciens est superflue — et serait un procédé peu correct vis à vis de la grande majorité des élèves.

3. PENSER

J'ai dit que le but principal d'un programme de mathématiques au niveau secondaire est d'apprendre aux élèves à penser. Cet énoncé demande de plus amples explications, mais une explication adéquate nécessiterait de répéter une bonne partie des exemples traités dans mes livres cités dans la

note ^A); une telle répétition est hors de question, mais les indications suivantes pourront aider.

On a proposé de divers côtés des objectifs variés tels que ceux-ci: expérience de la pensée indépendante, souplesse d'esprit, habitudes de travail améliorées, attitudes d'esprit désirables, élargissement du point de vue, maturité d'esprit, introduction à la méthode scientifique. Il me semble que ces objectifs, interprétés concrètement et raisonnablement au niveau secondaire, s'empîètent largement, et recouvrent ensemble le but que je préconise.

En abordant ce sujet d'un autre côté, on obtient une image mieux définie. Notre enseignement devrait englober tous les principaux aspects de la pensée du mathématicien, dans la mesure où c'est possible au niveau secondaire. Les activités les plus frappantes du mathématicien sont: la découverte de démonstrations rigoureuses et la construction de systèmes axiomatiques. Il y a cependant d'autres activités, qui d'habitude laissent moins de traces dans l'oeuvre achevée du mathématicien, et sont donc moins apparentes, mais pourtant non moins importantes: reconnaître et extraire un concept mathématique d'une situation concrète donnée; ensuite, « deviner » sous bien des formes: prévoir le résultat, prévoir les grandes lignes d'une démonstration avant d'en effectuer le détail. « Deviner » ainsi compris, peut aussi englober la généralisation à partir de cas observés, un raisonnement inductif, une argumentation par analogie, etc.

L'enseignement des mathématiques ne donne qu'une idée unilatérale, amoindrie, de la pensée du mathématicien, s'il supprime ces activités « non formelles » de deviner et d'extraire les concepts mathématiques du monde visible autour de nous; il néglige ce qui pourrait être la partie la plus intéressante pour l'élève en général, la plus instructive pour le futur utilisateur des mathématiques, et la plus fructueuse et la plus riche pour le futur mathématicien.

4. L'APPRENTISSAGE ACTIF

« Pour apprendre efficacement, l'élève devrait découvrir par lui-même une aussi grande part de la matière enseignée qu'il est possible dans les circonstances données ». Je préfère cette formulation ¹ du « principe de l'apprentissage actif » qui est le principe éducatif le moins controversé et le plus ancien (on peut le trouver chez Socrate). Les mathématiques ne sont pas un sport pour spectateur: on ne peut pas les apprécier et les apprendre

¹) Cf. 3. (cité dans la note A)), vol. 2, p. 103.

sans une participation active, de sorte que la principe d'apprentissage actif est particulièrement important pour nous, mathématiciens enseignants, spécialement si nous avons comme but principal, ou comme l'un des buts majeurs, d'apprendre aux enfants à penser.

Si nous voulons développer l'intelligence de l'élève, nous devons être attentifs à laisser venir les premières choses en premier. Certaines activités viennent plus facilement et naturellement que d'autres: deviner est plus facile que démontrer, résoudre des problèmes concrets plus naturel que construire des structures conceptuelles. En général, le concret vient avant l'abstrait, l'action et la perception avant les mots et les concepts, les concepts avant les symboles, etc.

Puisque l'élève devrait apprendre non pas réceptivement mais par son propre effort, commençons là où l'effort est moindre et le résultat de l'effort plus compréhensible du point de vue de l'élève: l'élève devrait se familiariser d'abord avec le concret, ensuite avec l'abstrait, d'abord avec la variété de l'expérience, ensuite avec l'unification des concepts, etc.

Cela conduit à la résolution des problèmes mathématiques, qui est, à mon avis, l'activité mathématique la plus proche du centre de la pensée de tous les jours. Nous avons un problème chaque fois que nous cherchons les moyens d'atteindre un but. Quand nous avons un désir que nous ne pouvons pas satisfaire immédiatement, nous pensons aux moyens de le satisfaire, ainsi se pose un problème. La plus grande partie de notre activité pensante, qui ne soit pas simplement un rêve éveillé, est occupée de choses que nous voulons et des moyens de les obtenir, c'est-à-dire de problèmes.

Souvent les problèmes quotidiens conduisent à des problèmes mathématiques simples, et le pas d'abstraction entre le problème quotidien et le problème mathématique peut être rendu facile et naturel à l'élève avec un peu d'adresse de la part du maître. Et comme les problèmes de tous les jours sont le centre de notre pensée journalière, de même on peut s'attendre à ce que les problèmes mathématiques soient au centre de l'enseignement des mathématiques.

La résolution des problèmes a été l'épine dorsale de l'enseignement des mathématiques depuis l'époque du papyrus Rhind. L'oeuvre d'Euclide peut être considérée comme un exploit pédagogique: disséquer le grand sujet de la géométrie en problèmes maniables. La résolution des problèmes est encore, à mon sens, l'épine dorsale de l'enseignement au niveau secondaire — et je suis gêné qu'une chose si évidente ait besoin d'être soulignée.

Certainement, il y a d'autres choses qui devraient être présentées au niveau secondaire: des démonstrations mathématiques, l'idée d'un système

axiomatique, peut-être même un coup d'oeil à la philosophie qui est sous-jacente aux démonstrations et aux structures mathématiques. Cependant ces sujets sont beaucoup plus éloignés de la pensée habituelle et ne peuvent pas être appréciés ou même compris sans un arrière-fond suffisant d'expériences mathématiques, que l'élève acquiert principalement en résolvant des problèmes.

5. CLASSIFICATION DES PROBLÈMES

Il y a problèmes et problèmes, et toutes sortes de différences entre problèmes. Cependant la différence la plus importante pour le professeur est celle entre les problèmes de routine et ceux qui ne le sont pas. Le problème qui ne se résoud pas par routine demande un certain degré de création et d'originalité de la part de l'élève, le problème de routine ne demande rien de tel. Le problème à résoudre sans routine a quelque chance de contribuer au développement intellectuel de l'élève, le problème de routine n'en a aucune. La ligne de démarcation entre ces deux types de problèmes peut ne pas être précise, cependant les cas extrêmes sont clairement reconnaissables. La brièveté de cet article ne permet qu'une courte description de deux types de problèmes routiniers: le problème qui demande simplement l'application d'une règle bien connue, et le problème qui n'est qu'une simple question de vocabulaire.

Un problème peut être résolu en appliquant mécaniquement et directement une règle que l'élève n'a aucune difficulté à trouver: elle est poussée sous son nez par le maître ou le manuel. Il n'y a aucune invention, aucun défi à son intelligence; ce qu'il peut tirer d'un tel problème est juste une certaine pratique dans l'application de cette seule règle, un petit bout isolé de connaissance mécanique.

Une question peut être formulée pour vérifier si l'élève peut utiliser correctement un terme ou un symbole du vocabulaire mathématique récemment introduit; l'élève peut immédiatement répondre à la question, pour autant qu'il ait compris l'explication du terme ou du symbole; il n'y a pas une étincelle d'invention, aucun appel à l'intelligence — c'est tout juste une question de vocabulaire.

Les problèmes routiniers, même des deux sortes qu'on vient de décrire, peuvent être utiles, même nécessaires, s'ils sont administrés au bon moment et à une juste dose. Ce contre quoi je proteste, c'est l'abus des problèmes routiniers, dont le seul résultat est de dégoûter les élèves intelligents de la matière qui leur est présentée sous l'étiquette de « mathématiques ».

Les manuels « traditionnels » sont durement critiqués de nos jours, mais la plupart de ces critiques ne semblent pas remarquer ce qui, à mon avis, est leur point le plus faible : presque tous leurs problèmes sont des problèmes routiniers du premier type que je viens de décrire.

Quant aux manuels « modernes », ils ont souvent des chapitres entiers pleins de termes et symboles nouveaux, qui restent sans relation avec l'expérience et l'arrière-fond mathématique de l'élève, et dont, par conséquent, l'élève ne peut pas faire un usage sérieux ; en conséquence, les problèmes à la fin du chapitre sont des problèmes routiniers particulièrement plats, la plupart d'entre eux de simples questions de vocabulaire.

Il me semble que le mauvais service rendu à l'élève est dans les deux cas de la même nature. Il n'y a pas beaucoup à choisir entre « traditionnel » et « moderne » si le choix consiste entre une rigidité étroite et trop de mots sans liens avec les faits.

Je n'expliquerai pas ce qu'est un problème mathématique non routinier : si vous n'en avez jamais résolu un, si vous n'avez jamais éprouvé la tension et le triomphe de la découverte, et si, après quelques années d'enseignement, vous n'avez pas encore observé une telle tension et un tel triomphe chez l'un de vos élèves, alors cherchez un autre métier et cessez d'enseigner les mathématiques.

6. LE CHOIX DES PROBLÈMES

La résolution d'un problème non routinier peut demander un véritable effort à l'élève ; cependant il ne le fera pas s'il n'a pas des raisons pour cela ; or la meilleure motivation est l'intérêt pour le problème. Aussi, nous devons prendre le plus grand soin à choisir des problèmes intéressants et à les rendre attrayants.

Tout d'abord, *le problème doit avoir un sens et venir à propos, du point de vue de l'élève*. Il doit être en relation d'une manière naturelle avec les choses qui sont familières, et il doit servir à une fin compréhensible à l'élève. Si le problème paraît à l'élève sans relations avec ce qui lui est habituel, l'affirmation du maître que ce sera utile plus tard, n'est qu'une pauvre compensation. Un maître qui assistait à l'une de mes conférences a rapporté la remarque suivante d'un de ses élèves de 15 ans : « Jusqu'ici, je peux faire tous les problèmes, mais je ne peux voir aucune raison au monde pour les faire ! »

Non seulement le choix, mais aussi la présentation du problème mérite notre attention. Une bonne présentation découvre des rapports avec les

choses familières et rend le but compréhensible. Le principe de l'enseignement actif nous suggère un petit truc très utile: le maître devrait ne pas commencer par l'énoncé complet du problème, mais par des suggestions appropriées et devrait laisser aux élèves le soin de trouver la formulation définitive.

De temps en temps, la classe devrait travailler à un problème plus important qui a un riche contenu et peut servir de porte d'entrée à un chapitre entier des mathématiques. Et la classe devrait travailler à un tel problème de recherche sans hâte, de telle sorte, que selon le principe de l'enseignement actif, les élèves puissent découvrir (ou soient conduits à découvrir) la solution, et puissent explorer par eux-mêmes quelques conséquences de la solution ¹.

7. CONDUIRE A LA DÉCOUVERTE

L'idée devrait naître dans l'esprit de l'élève et le maître devrait agir comme accoucheur; la métaphore est ancienne (elle est due à Socrate) mais non pas désuète. Si nous envisageons le développement de l'intelligence de l'élève comme le but principal (ou majeur) de l'enseignement au niveau secondaire, et le travail de l'élève pour résoudre des problèmes comme le moyen principal (ou majeur) d'atteindre cette fin, alors le principal (ou majeur) souci du maître doit être de conduire l'élève à découvrir la solution par lui-même.

Et la toute première chose, quand il s'agit d'aider l'élève, est de ne pas trop l'aider: il doit faire le maximum possible par lui-même. Le maître devrait éviter une trop grande interférence dans le procédé naturel de la naissance d'une idée.

Sans métaphores: en aidant l'élève, le maître ne devrait donner qu'une aide *intérieure*, c'est-à-dire, des suggestions qui auraient pu naître dans l'esprit de l'élève lui-même, et éviter une aide *extérieure*, c'est-à-dire de donner des bouts de solution qui n'ont pas de relation avec l'état d'esprit de l'élève.

Je dis qu'il est important de donner une aide intérieure, mais je ne dis pas que ce soit facile. Pour le faire avec efficacité, cela exige de la part du maître une bonne connaissance à la fois du problème et de l'élève; en outre, il doit être expérimenté et familiarisé avec les étapes de la résolution des problèmes qui se présentent souvent et naturellement.

¹) Ceci est un premier aperçu de ce que Wagenschein appelle « exemplarisches Lehren »; cf. note A), 3, vol. 2, p. 123.

8. L'HEURISTIQUE

L'heuristique est l'étude des chemins et moyens de découverte et d'invention; elle étudie spécialement, dans la résolution des problèmes, ces étapes qui se présentent souvent et naturellement et qui ont quelque chance de nous rapprocher de la solution. Ce n'est pas un genre d'étude très usuelle; bien que Descartes et Leibnitz y ont médité (ce dernier appelait l'heuristique « l'art de l'invention »), le sujet était pratiquement mort lorsque mon premier article s'y rapportant a paru en 1919.

Pour plus d'informations sur l'heuristique (la résolution des problèmes, l'art de deviner,...) on peut consulter les références données dans la note ^A. Les plus simples idées de l'heuristique sont des plus importantes pour le maître, qui pourrait, d'ailleurs, les extraire de sa propre expérience, puisqu'elles découlent du simple bon sens. (Mais le bon sens est plutôt peu commun, comme l'a remarqué Descartes.)

Voici quelques conseils à propos des problèmes de tous les jours, qui peuvent vous paraître tout à fait triviaux.

Faites face à votre problème si vous voulez le résoudre et demandez-vous: *qu'est-ce que je désire?* Et quand vous êtes décidé et que votre but est clair, envisagez tout ce qui se trouve à votre disposition, tout ce que vous pourriez utiliser pour l'obtenir, demandez-vous: *qu'est-ce que j'ai?* Ayant passé en revue pendant un certain temps tout ce que vous avez une chance d'utiliser, vous pouvez revenir à votre première question et la développer: *qu'est-ce que je veux? Comment est-ce que je peux l'obtenir? Où puis-je l'obtenir?* Et, en vous interrogeant ainsi, vous pouvez vous rapprocher de la solution de votre problème.

Il est moins trivial d'observer que les problèmes quotidiens présentent certaines analogies avec les problèmes mathématiques. Le maître qui essaie d'apporter une aide « de l'intérieur » à un élève penché sur un problème mathématique, peut avec profit utiliser les questions précédentes, ou des questions parallèles exprimées en termes mathématiques.

Le maître demande: *que voulez-vous? Quelle est l'inconnue?* Si l'objet de la recherche, l'inconnue, est suffisamment claire à l'élève, le maître peut continuer: *qu'est ce que vous avez, quelles sont les données, quelle est la condition?* Si l'élève donne des réponses suffisamment claires aussi à ces questions, le maître peut retourner à sa question initiale et la développer: *que voulez-vous obtenir? Quelle est l'inconnue? Par quel moyen pouvez-vous*

obtenir cette inconnue? Par quelles données pouvez-vous déterminer cette sorte d'inconnues? Et ces questions ont beaucoup de chance de mobiliser des connaissances appropriées dans l'esprit de l'élève et de l'amener plus près de la solution.

Ces questions sont des spécimens d'une heuristique pratique et de bon sens. Le maître devrait les utiliser d'abord dans les cas où elles suggèrent facilement l'idée juste à l'élève. Ensuite, il pourra les utiliser dans des cas de plus en plus nombreux, aussi souvent qu'il pourra le faire avec discernement et tact. A la longue, l'élève pourra comprendre la méthode et apprendre à utiliser lui-même ces questions: *il apprend ainsi à diriger son attention sur les points essentiels*, lorsqu'il se trouve devant un problème. De cette manière, il aura acquis l'habitude d'une pensée méthodique, ce qui est le plus grand bénéfice que puisse retirer des leçons de mathématiques la majorité des élèves, qui n'emploieront jamais de mathématiques dans leur profession.

Je renvoie le lecteur qui voudrait approfondir ces remarques sur l'heuristique, une fois de plus, aux ouvrages cités dans la note ^A.

(Reçu le 1^{er} mars 1967)

Department of Mathematics
Stanford University
Stanford, Cal. 94305.

Vide-leer-empty