Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 14 (1968)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONVEXITÉ ET ENCHAÎNEMENT
Autor: Bantegnie, Robert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42357

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CONVEXITÉ ET ENCHAÎNEMENT

par Robert BANTEGNIE

INTRODUCTION. Dans les espaces euclidiens R^n et plus généralement dans les espaces vectoriels topologiques réels la convexité est bien connue. Le premier, Menger [4] a étudié la convexité dans les espaces métriques. Nous en rappelons la définition. Si (E, d) est un espace métrique, pour des points a, b, c distincts de E, on dit que le point c est entre a et b si l'on a $d(a, c) + d(c, b) = d(a, b)$; s'il existe une image isométrique du segment réel $[0, d(a, b)]$ joignant dans E les points a et b on dit qu'existe dans E un segment joignant a et b; il peut exister plusieurs segments joignant deux points de E. (E, d) est *convexe* quand, quels que soient les points distincts de E, il existe dans E un point qui soit entre ces deux points; il est *segmenté* quand deux points quelconques de E peuvent être joints par un segment; il est *unisegmenté* quand il est segmenté et quand le segment joignant deux points quelconques est unique. Menger a montré (théorème de Menger) qu'un espace convexe et complet est segmenté. Rinow [5] a introduit une généralisation des espaces segmentés. Nous les appelerons espaces intrinsèques (Räume mit innerer Metrik): (E, d) est *intrinsèque* quand, quels que soient les points a et b de E, on a $d(a, b) = \inf \mathscr{L}(\Gamma)$ où la borne inférieure est prise sur la longueur $\mathscr{L}(\Gamma)$ des courbes rectifiables Γ joignant a et b dans E. Un espace segmenté est intrinsèque.

(E, d) est *presque convexe* si quel que soit $\varepsilon > 0$ et quels que soient les points a et b de E on peut trouver, dans E, c distinct de a et de b tel que

$$d(a, c) + d(c, b) \leqq d(a, b)(1 + \varepsilon);$$

il est *totalement convexe* si, pour tout λ de $I = [0, 1]$ et quels que soient a et b dans E, on peut trouver c dans E tel que

$$(1) \qquad d(a, c) = \lambda d(a, b), \quad d(c, b) = (1 - \lambda) d(a, b);$$

un espace segmenté est évidemment totalement convexe.

(E, d) est *totalement presque convexe* si quel que soit $\varepsilon > 0$ et λ dans I on peut trouver c dans E tel que

$$(2) \qquad |d(a,c) - \lambda d(a,b)| < \varepsilon d(a,b),$$
$$|d(c,b) - (1-\lambda) d(a,b)| < \varepsilon d(a,b).$$

Un espace totalement convexe est évidemment totalement presque convexe.

D'après [5], tout espace totalement presque convexe et complet est intrinsèque. Or, si, dans le plan euclidien, on considère le complémentaire d'un disque ouvert muni de la métrique induite c'est un espace connexe complet presque convexe qui n'est pas intrinsèque. On peut donc se demander sous quelle condition naturelle de presque convexité il est assuré qu'un espace métrique complet est intrinsèque.

Introduisons les notations suivantes où J désigne l'intervalle réel $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. On dit, pour $\lambda \in \bar{J}$, que (E, d) est *λ-pseudo convexe* si, pour tout couple (a, b) de points distincts de E on peut trouver c dans E distinct de a et de b tel que

$$(3) \quad d(a,c) + d(c,b) = d(a,b), \ \inf\big(d(a,c), d(c,b)\big) \geqq \lambda d(a,b);$$

de même (E, d) est *λ-pseudo presque convexe* (pour $\lambda \in \bar{J}$) si, quel que soit $\varepsilon > 0$ et le couple (a, b) de points distincts de E, on peut trouver c dans E distinct de a et de b tel que

$$(4) \quad d(a,c) + d(c,b) \leqq (1+\varepsilon) d(a,b), \ \inf\big(d(a,b), d(c,b)\big) \geqq \lambda d(a,b).$$

(E, d) est *λ-convexe* resp. *λ-presque convexe*, pour $\lambda \in I$, si quels que soient les points a et b de E et $\varepsilon > 0$ on peut trouver c dans E tel que (1) resp. (2) soit vérifié.

(E, d) est *uniformément convexe* resp. *uniformément presque convexe* si l'on peut trouver λ dans J, donc > 0, tel que E soit λ-pseudo convexe resp. λ-pseudo presque convexe.

On montre ici (théorème 1) qu'un espace uniformément presque convexe est totalement presque convexe donc intrinsèque: c'est le résultat annoncé dans [1]. Par contre, notons que l'ensemble réel $[-1, 0[\cup]0, 1]$ est un espace métrique uniformément convexe qui n'est pas totalement convexe. Rappelons aussi qu'on a montré ailleurs (cf. [2]) que les notions de λ-presque convexité et de λ-convexité coïncident dans les espaces dits compacts à distance finie où les fermés bornés sont compacts.

Au § 1, sont introduites d'autres notions de convexité; on étudie aussi la convexité sur l'intervalle I. Au § 2, on étudie les chaînes de points d'un espace métrique et on prouve un résultat (proposition 5) liant la λ-pseudo

presque convexité resp. la λ-pseudo convexité avec l'enchaînement d'ordre $1 + \varepsilon$ resp. d'ordre 1, résultat essentiel pour la preuve du théorème 1. Au § 3 figurent les résultats principaux. Enfin au § 4 et comme application on étudie les espaces rectifiablement bien enchaînés (voir là la définition).

On a donné, en passant, une preuve du théorème de Menger. Rappelons que les rapports entre le théorème 1 et la quasiconvexité (tout espace uniformément presque convexe est uniformément quasiconvexe) ont été donnés dans [1] ((E, d) est *quasiconvexe* si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout couple (a, b) de points distincts de E on peut trouver $\delta > 0$ et x dans E tel que $d(a, x) < d(a, b) - \delta$, $d(b, x) < \varepsilon$; il est *uniformément quasiconvexe* quand le choix du δ ci-dessus peut être fait indépendamment du couple (a, b)). Le 'ecteur intéressé trouvera d'autres résultats dans la suite d'articles « On convex metric spaces I-IV » (la partie I est due à A. Lelek, W. Nitka, *Fund. Math. 49* (1960/61), 183-204; un résumé de la partie II due à W. Nitka est paru dans *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys. 9* (1961), 77-78; la partie III est due à R. Duda, *Fund. Math. 51* (1962/63), 23-33 et la partie IV à A. Lelek, J. Mycielski, *Fund. Math. 61* (1967), 171-176). Rappelons aussi que le théorème 1 permet de montrer (cf. [2]) qu'un espace uniformément presque convexe et localement compact est convexe d'où résulte qu'un espace uniformément presque convexe complet et localement compact est compact à distance finie; ce dernier résultat généralise un des résultats de « On convex metric spaces, IV ».

1. Convexité. On désigne resp. par $I, \mathring{I}, J, \bar{J}, \mathring{J}$ les intervalles réels $[0, 1]$ $]0, 1]$, $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. En plus des notions rappelées ci-dessus, on dit que

pour $\Lambda \subset I$, (E, d) est *Λ-convexe* si, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout couple (a, b) de points de E on peut trouver c dans E tel qu'on ait (1); pour $\lambda = I$ ou $\mathring{I}$, (E, d) est totalement convexe; pour $\Lambda = \{\lambda\}$ il est λ-convexe.

Pour $\Lambda \subset I$, (E, d) est *Λ-presque convexe* si pour tout $\lambda \in \Lambda$, tout $\varepsilon > 0$ et tout couple (a, b) de points de E, on peut trouver c dans E tel qu'on ait (2); pour $\Lambda = I$ ou $\mathring{I}$, (E, d) est totalement presque convexe; pour $\Lambda = \{\lambda\}$ il est λ-presque convexe.

Pour $\Lambda \subset \bar{J}$, (E, d) est *Λ-pseudo presque convexe* si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, tout $\varepsilon > 0$ et tout couple (a, b) de points distincts de E, on peut trouver c dans E distinct de a et de b tel qu'on ait (4); pour $\Lambda = \{\lambda\}$ il est λ-pseudo presque convexe; pour $\Lambda = \{0\}$, il est presque convexe.

Pour $\Lambda \subset \bar{J}$, (E, d) est *Λ-pseudo convexe* si pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout couple (a, b) de points distincts de E, on peut trouver c dans E distinct de a et de b tel qu'on ait (3); pour $\lambda = \{ \lambda \}$, il est λ-pseudo convexe; pour $\Lambda = \{ 0 \}$ il est convexe.

Pour λ dans J, il est immédiat qu'un espace λ-convexe est λ-pseudo convexe, qu'un espace λ-pseudo convexe est λ'-pseudo convexe pour tout $\lambda' \leqslant \lambda$ de J et qu'un espace $\frac{1}{2}$-pseudo convexe est $\frac{1}{2}$-convexe.

De plus on a la

Proposition 1.

(a) *Pour λ dans J, un espace λ-presque convexe est λ'-pseudo presque convexe pour tout $\lambda' < \lambda$ de J.*

(b) *Un espace est $\frac{1}{2}$-presque convexe si et seulement s'il est $\mathring{J}$-pseudo presque convexe.*

Preuve. (a) Il suffit de montrer que les conditions de λ'-pseudo presque convexité sont satisfaites pour ε suffisamment petit. Or, posons $\eta = \varepsilon/2$ pour $0 < \varepsilon \leqslant 2(\lambda - \lambda')$; la λ-presque convexité entraîne l'existence, pour tout couple (a, b) de points distincts de l'espace, d'un point c avec

$$| d(a, c) - \lambda d(a, b) | < \eta d(a, b), \quad | d(b, c) - (1 - \lambda) d(a, b) | < \eta d(a, b);$$

on a alors

$$d(a, c) + d(c, b) < (1 + 2\eta) d(a, b) = (1 + \varepsilon) d(a, b)$$

et

$$\inf\big(d(a, c), \ d(c, b)\big) > (\lambda - \eta) d(a, b) \geqq \lambda' d(a, b)$$

d'où le résultat.

(b) Compte tenu de (a), il suffit de montrer que la $\mathring{J}$-pseudo presque convexité entraîne la $\frac{1}{2}$-presque convexité. Or la première propriété entraîne que, pour tout couple (a, b) de points distincts de l'espace et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver c tel que

$$d(a, c) + d(c, b) < (1 + \varepsilon/2) d(a, b),$$

$$\inf\big(d(a,c)\,,\ d(b,c)\big) \geqq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\,d(a,b)$$

et on a alors, compte tenu de l'inégalité triangulaire,

$$|\,d(a,c) - \frac{1}{2}d(a,b)\,| < \varepsilon d(a,b)\,,\ \ |\,d(c,b) - (1-\lambda)\,d(a,b)\,| < \varepsilon d(a,b)\,.$$

Une première propriété des espaces uniformément presque convexes est donnée par la

Proposition 2.

Si (E, d) est uniformément presque convexe, alors

(*) *Pour tout couple (a, b) de points distincts de E et tout couple (η, η') de nombres > 0, on peut trouver c dans E, distinct de a et de b, tel que*

$$d(a,c) + d(b,c) < (1+\eta)\,d(a,b)\,,\ \ d(b,c) < \eta'\,.$$

En particulier, (E, d) est parfait.

Preuve. Soit $Z_\eta(a, b)$ l'ensemble des points c distincts de a et de b vérifiant $d(a,c) + d(c,b) < (1+\eta)\,d(a,b)$; posons $\varphi = \inf\limits_{X \varepsilon Z_\eta(a,b)} d(b,x)$; il faut montrer que φ est nul.

Si $\varphi \neq 0$, pour tout $\varepsilon' > 0$, on peut trouver c dans $Z_\eta(a, b)$ tel que $\varphi \leqslant d(b,c) \leqslant \varphi(1+\varepsilon')$. Soit λ dans J tel que E soit λ-pseudo presque convexe; pour tout $\xi' > 0$ on peut trouver f dans E tel que

$$d(c,f) + d(f,b) < (1+\xi')\,d(b,c)\,,\ \ d(c,f) \geqq \lambda d(b,c)\,.$$

Soit $\xi > 0$ tel que

$$d(a,c) + d(c,b) \leqq (1+\eta-\xi)\,d(a,b)\,.$$

On a

$$\begin{aligned} d(a,f) + d(f,b) &\leqq d(a,c) + d(c,f) + d(f,b) \\ &< d(a,c) + d(c,b) + \xi'\,d(c,b) \\ &\leqq (1+\eta-\xi)\,d(a,b) + \xi'\,\varphi(1+\varepsilon') \end{aligned}$$

et

$$d(b,f) < (1+\xi'-\lambda)\,d(b,c)\,.$$

Il suffit alors de montrer qu'on peut choisir successivement ε' puis ξ de façon que simultanément on ait

$$\xi' \varphi(1+\varepsilon') \leqq \xi d(a,b)\,, \quad (1+\xi'-\lambda)(1+\varepsilon') \leqq 1$$

pour contredire la définition de φ: pour cela on prend

$$0 < \varepsilon' < \lambda/(1-\lambda)$$

$$0 < \xi' \leqq \inf\big(\lambda - (\varepsilon'/(1+\varepsilon'))\,,\ \xi d(a,b)/\varphi(1+\varepsilon')\big)\,.$$

Remarque. Si l'on prend $E =]-\infty, -1] \cup [+1, +\infty[$ muni de la topologie induite par celle de R, dans E la condition (*) est vérifiée et cependant E n'est pas uniformément presque convexe.

Dans la suite, on emploie toujours convexe au sens métrique.

En ce qui concerne la convexité sur I, on peut énoncer la

Proposition 3.

(a) *Toute partie convexe et fermée de I est un intervalle fermé.*

(b) *Toute partie uniformément convexe de I a pour adhérence un intervalle fermé.*

(c) *Il existe des parties convexes de I non uniformément convexes.*

Preuve. (a) Soit A la partie considérée. Il suffit de montrer que si α, β $(\alpha<\beta)$ sont les abscisses de deux points de A, l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est contenu dans A. Soit $A' = A \cap [\alpha, \beta]$ et B le complémentaire de A' par rapport à $[\alpha, \beta]$. Si l'ouvert B n'est pas vide, une de ses composantes connexes est un segment $]a, b[$ avec $b \neq a$; comme A' est fermé a et b sont dans A'; la convexité de A entraîne celle de A' et on peut trouver un point de A' dans $]a, b[$ ce qui est contradictoire.

(b) Soit A la partie considérée. Il suffit de montrer que α, β $(\alpha<\beta)$ étant les abscisses de deux points de A, $A' = A \cap [\alpha, \beta]$ est dense dans $[\alpha, \beta]$ ou encore que le complémentaire B de $\bar{A}'$ par rapport à $[\alpha, \beta]$ est vide. Si B n'est pas vide, une composante connexe de B est un segment $]a, b[$ dont les extrémités distinctes appartiennent à $\bar{A}'$. Soient (a_k), (b_k) des suites de points de A' convergeant resp. vers a et b. La λ-pseudo convexité de A pour λ dans J entraîne celle de A'; on peut donc trouver μ_k dans $[\lambda, 1-\lambda]$ tel que $c_k = \mu_k a_k + (1-\mu_k) b_k$ soit dans A'; on peut extraire de la suite (μ_k) une suite $(\mu_{k'})$ convergeant vers l'élément μ de $[\lambda, 1-\lambda]$; si on associe à cette suite les suites correspondantes $(a_{k'})$, $(b_{k'})$, $(c_{k'})$ ces suites convergent resp. vers a, b et $c = \mu a + (1-\mu) b$. On a $c \in]a, b[$ d'une part et $c \in \bar{A}'$ d'autre part comme limite d'une suite de points de A': contradiction.

(c) D'après (b), il suffit de trouver une partie convexe de I dont l'adhérence n'est pas un intervalle fermé. C'est le cas, par exemple de l'ensemble parfait $\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Remarque. L'énoncé (b) généralise un résultat de J.W. Green et W. Gustin qui dans [3] ont montré que la conclusion de (b) est valable quand on suppose que A est une partie λ-convexe contenant les extrémités de I.

2. Chaînes. Dans (E, d) une suite de $n+1$ points a_i $(i=1, \ldots, n+1)$ est une *n-chaîne* $C = (a_i)$ joignant, dans E, a_i à a_{1+1}. La n-chaîne est *stricte* si les $n+1$ points a_i sont distincts. La *longueur* de C est $\mathscr{L}(C) = \sum_{i=1}^{n} d(a_i, a_{i+1})$. Pour $\alpha \geqslant 1$, la chaîne C joignant a et b est *d'ordre* α si $\mathscr{L}(C) \leqslant \alpha d(a, b)$; elle est *d'ordre* α *à* ε *près* si, pour $\varepsilon > 0$, on a $\mathscr{L}(C) \leqslant (\alpha+\varepsilon)\, d(a, b)$.
On a $\mathscr{L}(C) = d(a, b)$ si et seulement si C est une chaîne d'ordre 1. $|C|$ *support* de C est la partie de E union des points de C. Pour une chaîne C, on désigne par $\delta(C)$ la borne supérieure de la distance de deux points consécutifs de C.

Si on note d la distance dans les deux espaces métriques E et F, une application d'une partie A de E dans F est dite de *type* $(0, \alpha)$ ou une *α-dilatation* resp. *de type* (β, α) si, avec $0 < \beta \leqslant \alpha$, pour tout couple (a, b) de points distincts de A on a les inégalités

$$0 < d\big(f(a), f(b)\big) \leqq \alpha d(a, b)$$

resp.

$$\beta d(a, b) \leqq d\big(f(a), f(b)\big) \leqq \alpha d(a, b).$$

$\mathscr{C}^{\alpha}(A, F)$, resp. $\mathscr{C}^{\alpha,\beta}(A, F)$ désigne l'ensemble des applications de type $(0, \alpha)$, resp. (β, α) de A dans F. Si f appartient à $\mathscr{C}^{\alpha,\beta}(A, F)$, f^{-1} appartient à $\mathscr{C}^{\beta-1,\alpha-1}(A, F)$ et f comme f^{-1} est uniformément continue. Une application de type (α, α) est une similitude, une application de type $(1, 1)$ une isométrie.

Proposition 4.

Dans (E, d), une n-chaîne, resp. une n-chaîne stricte joignant deux points distincts a et b est une chaîne d'ordre α si et seulement si c'est l'image par une α-dilatation de $n+1$ points x_j de R vérifiant (*), resp. (**) avec :

$$(*) \qquad x_1 = 0, x_{j+1} \geqq x_j \, (j = 1, \ldots, n), \; x_{n+1} = d(a, b)$$

$$(**) \qquad x_1 = 0, x_{j+1} > x_j \, (j = 1, \ldots, n), \; x_{n+1} = d(a, b).$$

Corollaire. Une n-chaîne, resp. une n-chaîne stricte joignant deux points distincts a et b est une chaîne d'ordre 1 si et seulement si c'est l'image isométrique de n + 1 points x_j de R vérifiant (*), resp. (**).

Preuve. Elle est laissée au lecteur.

Soit N, resp. N^* l'ensemble des entiers $\geqslant 0$, resp. > 0. Une n-chaîne (a_i) est une *ε-chaîne* si pour $\varepsilon > 0$ on a $d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$ pour $i = 1, \ldots, n$. On dit alors que (a_i) est une *(n, ε)-chaîne.* (E, d) est un espace *ε-enchaîné* si pour tout couple (a, b) de points de E, on peut trouver n dans N tel qu'existe une (n, ε)-chaîne de E joignant a et b. Il est *bien enchaîné* s'il est ε-enchaîné pour tout $\varepsilon > 0$. Il est *(α, ε)-enchaîné* si deux quelconques de ses points peuvent être joints par une ε-chaîne d'ordre α; il est *α-bien enchaîné* s'il est (α, ε)-enchaîné pour tout $\varepsilon > 0$; il est *α-presque bien enchaîné* s'il est, pour tout $\eta > 0$, $(\alpha+\eta)$-bien enchaîné.

Les notions précédentes s'appliquent à une partie A de E si l'on suppose que A les possède en tant qu'espace muni de la métrique induite.

Proposition 5.

Pour λ dans J,

(a) *Si E est un espace λ-pseudo convexe, pour tout couple (a, b) de points distincts de E, on peut construire une suite (C_n) de 2^n-chaînes strictes d'ordre 1 joignant a et b telles que*

(i) *pour tout* $n > 0$, $|C_n| \subset |C_{n+1}|$

(ii) *pour tout* $n \geqslant 1$, $\delta(C_n) \leqslant (1-\lambda)^n d(a, b)$

(b) *Si E est un espace λ-pseudo presque convexe, pour tout couple (a, b) de points distincts de E et tout* $\varepsilon > 0$, *on peut construire une suite (C_n) de 2^n-chaînes strictes d'ordre 1 + ε joignant a et b telle que la condition* (i) *soit vérifiée et que*

(iii) *on peut trouver λ* dans J tel que, pour tout* $n \geqslant 1$, $\delta(C_n) \leqslant (1-\lambda^*)^n d(a, b)$.

Preuve. (a) On pose $C_0 = (a, b)$, $C_1 = (a, c, b)$ où c vérifie la condition (3) du § 1 d'où résulte $\delta(C_1) \leqslant (1-\lambda) d(a, b)$ et on construit la suite (C_n) par récurrence: C_{n+1} se déduit de C_n ainsi qu'il suit.

Le support $|C_{n+1}|$ est l'union de $|C_n|$ et de 2^n points t qu'on détermine ainsi: (u, v) étant un couple de points consécutifs de C_n, t est tel que

$$d(u,t) + d(t,v) = d(u,v)\,, \quad \inf\big(d(u,t)\,,\ d(t,v)\big) \geqq \lambda d(u,v)\,.$$

On en déduit $\sup\big(d(u, t), d(t, v)\big) \leqslant (1-\lambda)\, d(u, v)$ et C_{n+1} est complètement déterminée en convenant que u, t, v sont toujours trois points consécutifs de C_{n+1}. C_{n+1} est une chaîne d'ordre 1 en même temps que C_n et $\delta(C_{n+1}) \leqslant (1-\lambda)\,\delta(C_n)$. La construction de la suite (C_n) vérifiant (i) et (ii) est alors immédiate.

(b) On peut supposer ε suffisamment petit. Pour $\varepsilon < 2\lambda$ on a une construction par récurrence analogue à celle de (a). Soit $C_0 = (a, b)$ et $C_1 = (a, c, b)$ où d'après le (4) du § 1 on suppose

$$d(a,c) + d(c,b) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) d(a,b)\,, \quad \inf\big(d(a,c)\,,\ d(c,b)\big) \geqq \lambda d(a,b)$$

d'où résulte

$$\delta(C_1) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - \lambda\right) d(a,b)\,.$$

Choisissons λ^* dans $\left]0, \lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right]$: alors (i) est vérifié pour $n = 0, 1$ et (iii) pour $n = 1$.

Supposons qu'on a pu construire C_n de façon que (i) soit vérifié jusqu'à l'ordre $n - 1$, que $\delta(C_n) \leqslant (1-\lambda^*)^n\, d(a, b)$ et que

$$\text{(iv)}\quad \mathscr{L}(C_n) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{J=0}^{2^n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^j\right) d(a,b)$$

la condition (iv) entraînant que C_j est une chaîne d'ordre $1 + \varepsilon$ pour $j \leqslant n$ et étant vérifiée pour $n = 1$.

On détermine C_{n+1} ainsi qu'il suit. $|C_{n+1}|$ est l'union de $|C_n|$ et de 2^n points t: (u, v) étant un couple de points consécutifs de C_n, t est tel que

$$d(u,t) + d(t,v) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{2^n}}\right) d(u,v)\,, \quad \inf\big(d(u,t)\,,\ d(t,v)\big) \geqq \lambda d(u,v)$$

On en déduit

$$\sup\ \big(d(u,t)\,,\ d(t,v)\big) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - \lambda\right) d(u,v) \leqq (1-\lambda^*)^{n+1}\, d(a,b)$$

et C_{n+1} est bien déterminée en convenant que u, t, v en sont toujours trois points consécutifs. C_{n+1} est une 2^{n+1}-chaîne joignant a et b; on a

$$|C_n| \subset |C_{n+1}|, \quad \delta(C_{n+1}) < (1-\lambda^*)^{n+1} d(a,b)$$

et aussi

$$\text{(V)} \quad \mathscr{L}(C_{n+1}) < \left(1+\frac{\varepsilon}{2^{2^n}}\right) \mathscr{L}(C_n).$$

Or, $\varepsilon^2 < \varepsilon$ entraîne

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2^{2^n}}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=0}^{2^n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = 1+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=0}^{2^n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{j=0}^{2^n+2^n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

$$< 1+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=0}^{2^{n+1}-2}\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

et achève de prouver la construction par récurrence de la suite (C_n) vérifiant (i) et (iii).

3. Les resultats principaux.

Théorème 1. Pour une partie A d'un espace métrique E

(a) *il y a équivalence entre les propriétés*
- (i) *A est uniformément convexe*
- (ii) *A est 1-bien enchaîné*
- (iii) *A est $\mathring{J}$-pseudo convexe.*

(b) *il y a équivalence entre les propriétés*
- (i′) *A est uniformément presque convexe*
- (ii′) *A est 1-presque bien enchaîné*
- (iii′) *A est $\mathring{J}$-pseudo presque convexe*
- (iv′) *A est totalement presque convexe.*

Preuve. On se ramène au cas $A = E$.

(a) Que (iii) entraîne (i) est évident. Que (i) entraîne (ii) résulte de la proposition 5 (a). Montrons que (ii) entraîne (iii).

Pour λ dans $\mathring{J}$, soit ε avec $0 < \varepsilon < \left(\frac{1}{2}-\lambda\right) d(a, b)$ et $C = (a_i)$ une (n, ε)-chaîne d'ordre 1 joignant les points a et b de E; pour tout point c de C on a $d(a, c) + d(c, b) = d(a, b)$; il suffit donc de trouver c dans C

tel que $\lambda d(a, b) \leqslant d(a, c) < \frac{1}{2} d(a, b)$; si cela n'était pas possible, on pourrait trouver a_i et a_{i+1} dans C tels que

$$d(a, a_i) < \lambda d(a, b)\,, \quad d(a, a_{i+1}) \geqq \frac{1}{2} d(a, b)$$

d'où

$$d(a_i, a_{i+1}) = d(a, a_{i+1}) - d(a, a_i) > \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) d(a, b) > \varepsilon:$$

c'est exclu.

(b) Que (iv′) entraîne (i′) résulte de la proposition 1 (a), que (i′) entraîne (ii′) de la proposition 5 (b).

Que (ii′) entraîne (iii′) se prouve par un raisonnement voisin de celui montrant que (ii) entraîne (iii).

Montrons que (iii′) entraîne (iv′). Nous avons besoin du

Lemme 1. Si l'espace métrique E est $\frac{1}{2}$-presque convexe pour tout couple (a, b) de points distincts de E et tout $\eta > 0$, il existe une application f de l'ensemble des nombres dyadiques de I dans E telle que, pour tout couple (t, t') de nombres dyadiques de I on ait

$$f(0) = a\,, \; f(1) = b\,, \; d\big(f(t), f(t')\big) < |t - t'|\, d(a, b)(1 + \eta)$$

Preuve du lemme. Cf. § 18, prop. 21, p. 156 de [5].

D'après la proposition 1 (b), un espace vérifiant (iii′) est $\frac{1}{2}$-presque convexe. Soit alors f l'application qui pour $\eta > 0$ donné est définie dans le lemme 1. Pour tout λ de $\bar{J}$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver μ et ν entiers tels que $2^{-\mu} < \varepsilon$ et $(\upsilon - 1)\, 2^{-\mu} \leqslant \upsilon < \upsilon 2^{-\mu}$.
On a

$$d\big(a, f(\upsilon 2^{-\mu})\big) < \upsilon 2^{-\mu} d(a, b)(1 + \eta) < (\lambda + \varepsilon + \eta + \varepsilon\eta)\, d(a, b)\,.$$

Soit alors $\varepsilon' > 0$ donné; on peut trouver $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que $\varepsilon + \eta + \varepsilon\eta \leqslant \varepsilon'$ et alors pour $c = f(\upsilon 2^{-\mu})$ on a

$$d(a, c) < (\lambda + \varepsilon')\, d(a, b)\,, \quad d(b, c) < (1 - \lambda + \varepsilon')\, d(a, b)$$

et compte tenu de l'inégalité triangulaire, les relations

$$|d(a, c) - \lambda d(a, b)| < \varepsilon'\, d(a, b)\,,$$

$$|d(c, b) - (1 - \lambda)\, d(a, b)| < \varepsilon'\, d(a, b)\,.$$

Cela établit la λ-presque convexité de E pour tout λ de $\bar{J}$ ce qui suffit pour établir la totale presque convexité de E.

Théorème 2.

(a) *Tout espace métrique uniformément presque convexe et complet est intrinsèque*

(b) *Tout espace convexe et complet est segmenté.*

Preuve. (a) Rinow [5], p. 156, a montré que tout espace $\frac{1}{2}$-presque convexe et complet est intrinsèque. C'est donc un corollaire du théorème 1 (b).

(b) C'est le théorème de Menger. On peut en donner la preuve suivante.

On sait que si E, F sont deux espaces métriques, si F est complet et si $A \subset E$, tout élément de $\mathscr{C}^{\alpha,\beta}(A, F)$ admet des prolongements maximaux dans $\bigcup_{A \subset E} \mathscr{C}^{\alpha,\beta}(A, F)$ le domaine de définition M d'un de ces prolongements m étant fermé; de plus si E est complet, $m(M)$ est fermé dans F.

D'après ce résultat, si a et b sont deux points distincts de E, l'application isométrique f_0 de $\{a\} \cup \{b\}$ dans le segment $I' = [0, d(a, b)]$ définie par $f_0(a) = 0, f_0(b) = d(a, b)$ s'étend en une application isométrique maximale m dont l'image dans I' est une partie fermée. Il suffit de montrer que cette image est convexe car alors, d'après la proposition 3, elle coïncide avec I' et le domaine de définition M de m est un segment joignant a et b.

Si $m(M)$ n'est pas convexe, on peut trouver y_1 et y_2 dans $m(M)$ tel que $]y_1, y_2[$ n'appartienne pas à $m(M)$. Soit, pour $i = 1, 2$, $x_i = m^{-1}(y_i)$ et x dans E distinct de x_1 et x_2 tel que

$$d(x_1, x) + d(x, x_2) = d(x_1, x_2);$$

associons à x le point y de $]y_1, y_2[$ défini par

$$d(y_1, y) = d(x_1, x), \quad d(y, y_2) = d(x, x_2)$$

et soit m^* l'application dans I' dont le domaine de définition est $M \cup \{x\}$ définie par $m^*(z) = m(z)$ pour $z \in M$, $m^*(x) = y$. Du fait que tout point z de M est tel que, pour $i = 1$ ou 2, on a

$$d(z, x_i) + d(x_i, x) = d(z, x)$$

résulte que m^* est un prolongement isométrique strict de m: c'est exclu.

4. Espaces rectifiablement bien enchaînés. Dans un espace métrique ε-enchaîné E, on pose, pour tout couple (x, y) de point de E.

$d_\varepsilon(x, y) = 0$ pour $x = y$

$d_\varepsilon(x, y) = \inf \mathscr{L}(C_\varepsilon)$ pour $x \neq y$, la borne inférieure étant prise sur les ε-chaînes C_ε joignant x et y.

Dans un espace métrique bien enchaîné E on pose, pour tout couple (x, y) de points de E, $\hat{d}(x, y) = \sup_{\varepsilon > 0} d_\varepsilon(x, y)$.

L'espace E est *rectifiablement bien enchaîné* si $\hat{d}(x, y)$ est borné pour tout couple (x, y).

L'espace métrique E est *enchaîné sans détour* si pour tout x de E et tout $\eta > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ tout point de $U_\delta(x) = \{ z \mid d(x, z) < \delta \}$ peut être lié à x par une ε-chaîne de longueur inférieure à η; il est *uniformément enchaîné sans détour* si le choix du δ ci-dessus peut être fait indépendamment du point x considéré.

Proposition 6.

(a) *Sur tout espace ε-enchaîné E, d_ε définit une métrique ; on a, pour tout couple (x, y) de points de E, $d_\varepsilon(x, y) \geqslant d(x, y)$.*

(b) *Sur tout espace rectifiablement bien enchaîné, $\hat{d}$ définit une métrique et $(E, \hat{d})$ est un espace totalement presque convexe. Les métriques d et $\hat{d}$ sont topologiquement resp. uniformément équivalentes si et seulement si l'espace est enchaîné sans détour resp. uniformément enchaîné sans détour.*

(c) *Un espace métrique est 1-presque bien enchaîné si et seulement si, sur lui, les métriques d et $\hat{d}$ coïncident.*

Preuve. (a) L'inégalité est évidente; de plus $d_\varepsilon(x, y) = d(x, y)$ pour $\varepsilon \geqslant d(x, y)$. L'inégalité triangulaire portant sur trois points x, y, z de E est évidente si deux de ces points sont confondus; on peut donc supposer qu'ils sont distincts; montrons que dans ce cas pour tout $\eta > 0$ on a $d_\varepsilon(x, y) \leqslant d_\varepsilon(x, z) + d_\varepsilon(z, x) + 2\eta$ ce qui suffit. On peut choisir une ε-chaîne C_1 joignant x et z telle que $\mathscr{L}(C_1) < d(x, z) + \eta$ et une ε-chaîne C_2 joignant z et y telle que $\mathscr{L}(C_2) < d_\varepsilon(z, y) + \eta$; $C_1 \cup C_2$ est alors une ε-chaîne joignant x et y de longueur $\mathscr{L}(C_1) + \mathscr{L}(C_2)$ d'où le résultat puisque $d_\varepsilon(x, y) \leqslant \mathscr{L}(C_1 \cup C_2)$.

(b) Que $\hat{d}$ est une métrique est immédiat, compte tenu de (a). Pour tout couple (ε, η) de nombres > 0 on peut trouver une ε-chaîne C_ε telle

que $d_\varepsilon(x, y) \leqslant (C_\varepsilon) < (1+\eta)\, d_\varepsilon(x, y)\, \mathscr{L} \leqslant (1+\eta)\, \hat{d}\,(x, y)$ ce qui montre que $(E, \hat{d})$ est 1-presque bien enchaîné, donc totalement presque convexe d'après le théorème 1. Ce qui concerne l'équivalence des métriques est immédiat.

(c) Si l'espace est 1-presque bien enchaîné on a pour tout $\varepsilon > 0$, $d_\varepsilon(x, y) = d(x, y)$ donc $\hat{d}\,(x, y) = d(x, y)$ pour toutc ouple (x, y). Réciproquement c'est encore plus évident.

On dit qu'un espace (E, d) est *rectifiablement lié* si pour tout couple (x, y) de points de E on peut trouver un arc rectifiable Γ joignant x et y dans E. On pose alors $d_i(x, y) = \inf \mathscr{L}(\Gamma)$, la borne inférieure étant celle des longueurs des arcs comme ci-dessus, d_i définit sur E une métrique appelée métrique intrinsèque associée à d.

Proposition 7.

Tout espace métrique (E, d) localement compact complet enchaîné sans détour et rectifiablement bien enchaîné est rectifiablement lié. Par rapport à sa métrique intrinsèque d_i il est compact à distance finie et segmenté.

Preuve. $(E, \hat{d})$ est aussi localement compact et complet; il est totalement presque convexe d'après la proposition 6, donc compact à distance finie et segmenté d'après le corollaire 1 du théorème 3 de [2]. Mais alors (E, d) est rectifiablement lié et d_i et $\hat{d}$ coïncident, d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bantegnie, R., Sur certains espaces métriques. Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch. A 70, *Indag. Math. 29*, 74-75 (1967).

[2] —— χ-régularité et compacité à distance finie. *C.R. Ac. Sci.* Paris, 265 A, 772-775 (1967).

[3] Green, J. W. et W. Gustin, Quasiconvex sets. *Can. J. of Math. 2*, 489-507 (1950).

[4] Menger, K., Untersuchungen über allgemeine Metrik I, II, III. *Math. Ann. 100*, 75-163 (1928).

[5] Rinow, W., Die innere Geometrie den metrischen Raumes. Springer, Berlin, Gôttingen, Heidelberg (1961).

(Reçu le 25 mars 1969.)

R. Bantegnie
2.A., rue des Jardins
25 Besançon (France)