3. Interprétations des représentations complexes irréductibles d'un tore T

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

gauche de G/U. On a évidemment $f(gu) = f(g)\,\iota(u)$ pour $u \in U$, donc f détermine un isomorphisme $\iota(G_U) \approx P'$. Il en résulte l'isomorphisme annoncé $G_U\,[\mathbf{R}^n] \approx \xi$.

Corollaire : Dans les conditions du lemme, soient T un sous-groupe de U, et $q : G/T \to G/U$ l'application canonique $gT \mapsto gU$. Alors $q^*\xi$ est le fibré $G_T\,[\mathbf{R}^n]$, $\mathbf{R}^n$ étant le T-espace déterminé par $\iota \mid T$.

Preuve : On a déjà vu que q^*G_U est la i-extension de G_T. Or $q^*\xi$ est associé au 0_n-fibré principal q^*P', donc$q^*\,P' \approx q^*\,({}_{\iota}G_U) = \iota(q^*G_U) = {}_{\iota}(G_T)$. Il en résulte que $q^*\xi \approx G_T\,[\mathbf{R}^n]$, pour l'action $\iota \mid T$ de T sur $\mathbf{R}^n$.

3. Interprétations des représentations complexes irréductibles d'un tore T

Tout homomorphisme différentiable $h : U_1 \to U_1$ est de la forme $h\,(\exp ix) = \exp iax$, $a \in \mathbf{Z}$. Cela résulte du fait que la différentielle d'une translation à gauche τ_g de U_1 est en tout point l'identité $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ce qui implique $dh\,(g) = dh\,(1), g \in U_1$, en vertu de $dh\,(g) \circ d\,\tau_g\,(1) = d(h \circ \tau_g)(1) = d(\tau_{(hg)} \circ h)(1)$. Alors h est nécessairement de la forme ci-dessus, avec $a \in \mathbf{R}$. Mais si $x \in \mathbf{Z}$, on doit avoir $ax \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire $a \in \mathbf{Z}$. Plus généralement, si $T = U_1 \times \ldots \times U_1$ et si $k_j : U_1 \to T$ applique $\exp ix$ sur $(1, \ldots 1, \exp ix, 1, \ldots 1)$, tout homomorphisme $h : T \to U_1$ est de la forme $h\,(\exp ix_1, \ldots \exp ix_n) = \prod_j h \circ k_j\,(\exp ix_j) = \prod_j \exp i\,a_j x_j = \exp i\,(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)$, $a_j \in \mathbf{Z}$. D'où une bijection canonique $\alpha : \operatorname{Hom}(T, U_1) \approx \mathbf{Z}^n$, $\alpha\,(h) = (a_j)$. Par ailleurs, $\operatorname{Hom}(T, U_1)$ est un groupe abélien pour la multiplication des homomorphismes, et l'on voit aussitôt que α est un isomorphisme de groupes. En composant α avec l'inclusion $\mathbf{Z}^n \to \operatorname{Hom}_R\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ donnée par $(a_j) \to a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, on obtient l'homomorphisme injectif $h \mapsto dh\,(1, \ldots, 1)$ de $\operatorname{Hom}(T, U_1)$ dans le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t} = \mathbf{R}^n$ de T. En particulier, si p_j est la projection de T sur son j^{ieme} facteur, $\alpha\,(P_j)$ est la fonction coordonnée x_j sur $\mathbf{R}^n$.

Considérons maintenant les groupes de cohomologie $H^1\,(T; \mathbf{Z})$ et $H^1\,(U_1; \mathbf{Z})$, où l'on suppose U_1 orienté de la manière habituelle. Alors $H^1\,(U_1; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, donc tout $h \in \operatorname{Hom}(T, U_1)$ détermine un élément $h^*(1) \in H^1\,(T; \mathbf{Z})$, h^* étant l'homomorphisme $H^1\,(U_1; \mathbf{Z}) \to H^1\,(T; \mathbf{Z})$ induit par h. On obtient ainsi un homomorphisme naturel $\nu_T : \operatorname{Hom}(T, U_1) \to H^1\,(T; \mathbf{Z})$.

En effet, si h et h' sont deux homomorphismes de T dans U_1, considérons le diagramme

$$U_1 \times U_1 \;\begin{array}{c} \xrightarrow{m} \\ \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \\ \xleftarrow{k_1} \\ \xleftarrow{k_2} \end{array}\; U_1 \qquad p_i = {}^{ieme}\text{ composante}$$

où $k_1(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 1)$, $k_2(e^{i\theta}) = (1, e^{i\theta})$, et $m(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = e^{i\theta} \,.\, e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$. Comme $mk_1 = mk_2 =$ identité, on a $k_1^* m^*(1) = k_2^* m^*(1) = 1$ dans $H^1(U_1; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Donc $(k_1 p_1)^* m^*(1) = p_1^*(1)$, $(k_2 p_2)^* m^*(1) = p_2^*(1)$ dans $H^1(U_1 \times U_1; \mathbf{Z})$. Mais la formule de Künneth $H^1(U_1 \times U_1; \mathbf{Z}) \approx H^1(U_1; \mathbf{Z}) \oplus H^1(U_1; \mathbf{Z})$ dit précisément que tout élément $\alpha \in H^1(U_1 \times U_1; \mathbf{Z})$ s'écrit de manière unique $\alpha = (k_1 p_1)^* \alpha + (k_2 p_2)^* \alpha$. En particulier $m^*(1) = p_1^*(1) + p_2^*(1)$, donc si hh' est l'homomorphisme produit $m \circ (h \times h')$, on a $(hh')^*(1) = h^*(1) + h'^*(1)$, c'est-à-dire $\nu_T(hh') = \nu_T(h) + \nu_T(h')$. La naturalité de ν_T s'exprime ainsi: pour tout homomorphisme de tores $\phi : T' \to T$, on a $\phi^* \circ \nu = \nu \circ \phi^*$, où le premier ϕ^* est l'homomorphisme induit $H^1(T; \mathbf{Z}) \to H^1(T'; \mathbf{Z})$, tandis que le second est l'homomorphisme induit $\mathrm{Hom}(T; U_1) \to \mathrm{Hom}(T'; U_1)$. Cela résulte aussitôt de l'égalité $(h \circ \phi)^*(1) = \phi^*(h^*(1))$.

Lemme: ν_T est un isomorphisme.

Preuve: Dans le cas $T = U_1$, ν est un homomorphisme $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ tel que $\nu(1) = 1$ En général, on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{Hom}(T, U_1) \approx \oplus \mathrm{Hom}(U_1, U_1)$ et $H^1(T; \mathbf{Z}) \approx \oplus H^1(U_1; \mathbf{Z})$ (formule de Künneth). Avec ces décompositions, la j^{ieme} composante de $h \in \mathrm{Hom}(T, U_1)$ est $h \circ k_j$ et celle de $h^*(1)$ est $k_j^* \circ h^*(1) = (h \circ k_j)^*(1)$. Donc ν se décompose en somme directe d'isomorphismes.

Considérons maintenant un T-fibré principal P de base $B(P) = X$. Pour tout $h \in \mathrm{Hom}(T, U_1)$, on peut construire le fibré vectoriel de rang 1 $\xi_h = P[\mathbf{C}]$, où $\mathbf{C}$ est le T-espace déterminé par h. Sa classe d'Euler $\chi(\xi_h)$ est un élément de $H^2(X; \mathbf{Z})$. De cette manière, on obtient un homomorphisme naturel $\mu_P : \mathrm{Hom}(T, U_1) \to H^2(X; \mathbf{Z})$. En effet, si h et h' sont deux homomorphismes de T dans U_1, et hh' l'homomorphisme produit, on a un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels $\xi_h \otimes \xi_{h'} \approx \xi_{hh'}$, qui associe à tout vecteur $(x \times_{U_1} z) \otimes (x \times_{U_1} z')$ de $\xi_h \otimes \xi_{h'}$ le vecteur $x \times_{U_1} zz'$ de $\xi_{hh'}$. Mais d'une manière générale pour deux fibrés vectoriels complexes ξ et ξ' de rang 1 sur X, on a $\chi(\xi \otimes \xi') = \chi(\xi) + \chi(\xi')$. On le voit en utilisant des applications classifiantes pour χ et χ, et en vérifiant que $\chi(\eta \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta) \oplus \chi(\eta)$, où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel externe sur $PC^1 \times \times PC^1$: si x est un point fixé de PC^1, on a $\eta \hat{\otimes} \eta \,|\, x \times PC^1 \cong \eta$ et de même $\eta \hat{\otimes} \eta |\, PC^1 \times y \cong \eta$. Donc, si k_1 et k_2 désignent les inclusions $PC^1 \to PC^1 \times PC^1$, $k_1(y) = (y, x)$, $k_2(y) = (x, y)$, on a $k_1^* \chi(\eta \hat{\otimes} \eta) = k_2^* \chi(\eta \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta)$. Mais on a l'isomorphisme de Künneth $H^2(PC^1 \times \times PC^1; \mathbf{Z}) \cong H^2(PC^1; \mathbf{Z}) \oplus H^2(PC^1; \mathbf{Z})$ donné par $\alpha \to k_1^*(\alpha) \oplus k_2^*(\alpha)$, puisque $H^1(PC^1; \mathbf{Z}) = 0$ en vertu de la suite exacte de Gysin de η. La naturalité de μ_P s'exprime comme suit: soient $\phi : T' \to T$ un homomorphisme de tores, P' un T'-fibré principal, P un T-fibré principal et ${}_\phi P' \to P$ un morphisme de T-fibrés principaux. Si $f: X' \to X$ est l'application induite entre les bases, alors $f^* \circ \mu_P = \mu_{P'} \circ \phi^*$. En effet: $f^*(\xi_h) = f^* P[\mathbf{C}]$ et $f^* P \approx {}_\phi P'$, donc $f^*(\xi_h) = {}_\phi P'[\mathbf{C}]$, où $\mathbf{C}$ est le T-espace déterminé par h Mais ${}_\phi P'[\mathbf{C}] = P'[\mathbf{C}]$, où $\mathbf{C}$ au second membre est leT'-espace dé terminé. par $h \circ \phi$. Donc $\chi(f^* \xi_h) = \chi(\xi_{h \circ \phi})$, et il suffit de rappeler que $\chi(f^* \xi_h) = f^* \chi(\xi_h)$.

Lemme: Pour le T-fibré principal $\gamma \times \gamma \times \ldots \times \gamma$ sur $B_T = PC^n \times \times \ldots \times PC^n$, $\mu_{\gamma \times \ldots \times \gamma}$ est un isomorphisme.

Preuve: Envisageons d'abord le cas $T = U_1$. Pour $h =$ identité: $U_1 \to U_1$, ξ_h est le fibré canonique η et $\chi(\eta)$ engendre $H^2(PC^n; \mathbf{Z})$ en vertu de la suite de Gysin de η. Donc μ_γ est surjectif. Comme $H^2(PC^n; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ en vertu de la même suite exacte, μ_γ est nécessairement injectif.

En général, on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{Hom}(T, U_1) \approx \approx \oplus \mathrm{Hom}(U_1, U_1)$ et $H^2(B_T; \mathbf{Z}) \approx \oplus H^2(PC^n; \mathbf{Z})$ (formule de Künneth). Avec ces décompositions, la j^{ieme} composante de $h \in \mathrm{Hom}(T, U_1)$ est $h \circ k_j$, et celle de $\chi(\xi_h)$ est $k_j^* \chi(\xi_h)$, où k_j désigne cette fois l'application identité de PC^n sur $x \times \ldots x \times PC^n \times x \ldots \times x \subset B_T$, qui est d'ailleurs telle que $k_j^*(\gamma \times \ldots \times \gamma) = {}_{k_j}\gamma$. Comme $k_j^* \chi(\xi_h) = \chi(k_j^* \xi_h) = \chi({}_{h \circ k_j}\gamma[\mathbf{C}])$, on a décomposé $\mu_{\gamma \times \ldots \times \gamma}$ en somme directe d'isomorphismes.

Définition: On appelle *transgression* dans un T-fibré principal P de base X l'homomorphisme composé $\tau_P = \mu_P \nu_T^{-1} : H^1(T; \mathbf{Z}) \to H^2(X; \mathbf{Z})$. Elle est naturelle et c'est un isomorphisme lorsque P est universel, c'est-à-dire lorsque $P = \gamma \times \ldots \times \gamma$. La naturalité s'exprime ainsi: soit $\phi : T' \to T$ un homomorphisme de tores, P' un T'-fibré principal de base X', et ${}_\phi P' \to P$ un morphisme de T-fibrés principaux induisant une application $f: X' \to X$ des bases. Alors $f^* \circ \tau_P = \tau_{P'} \circ \phi^*$, ce qui résulte de la naturalité de μ_P et ν_T.