

Appendice: le principe de clivage

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Preuve : Il suffit de se rappeler que ξ^J est associé au U -fibré principal G_U par la représentation ι^J de U , et d'appliquer la formule trouvée au § 4.

Convention d'écriture : On écrit seulement $-\alpha_{\mathbf{R}}^J$ au lieu de $\tau_{G_T}(\omega_{\alpha}^J)$, de sorte que la formule précédente devient

$$q^*(c(G/U)) = \prod (1 - \alpha_{\mathbf{R}}^J).$$

Exemple :

Reprenons PC^n (cf. §1), pour lequel on sait que $\alpha_{\mathbf{R}}^J = x_{\alpha} - x_1$, $\alpha > 1$, donc $q^*(c(PC^n)) = \prod_{\alpha > 1} (1 + x_1 - x_{\alpha})$. Considérons \mathbf{C}^{n+1} comme fibré vectoriel ζ sur un point a . En composant $q : U_{n+1}/T \rightarrow PC^n$ avec l'application constante $s : PC^n \rightarrow a$, on obtient l'application constante $r : U_{n+1}/T \rightarrow a$. D'après la remarque 2) du §4, $s^*(c(\zeta))$ s'écrit $\prod_{i=1} (1 - x_i)$. Donc $\prod_{i=1} (1 - x_i) = 1$ dans $A = H^*(U_{n+1}/T; \mathbf{Z})$, puisque $c(\zeta) = 1$. D'où l'identité $\prod (X - x_i) = X^n$ dans l'anneau des polynômes en X à coefficients dans A . En substituant $1 + x_1$ à X , on obtient $q^*(c(PC^n)) = (1 + x_1)^n$. On a $\xi = \xi' \oplus \xi''$, avec ξ' de rang 1, puisque ξ est associé à un $U_1 \times U_n$ - fibré principal par ι^J , et ξ' n'est autre que $r^* \zeta$, c'est-à-dire par construction γ . Donc $x_1 = q^*(t)$, où t engendre $H^2(PC^n; \mathbf{Z})$. Comme q^* est injectif en vertu du principe de clivage, on en tire $c(PC^n) = (1 + t)^n$.

On trouvera de profondes applications de la proposition dans [4].

APPENDICE: le principe de clivage

Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n sur un espace connexe X . Considérons l'espace $P(\xi)$ des droites contenues dans les fibres de ξ , ainsi que la projection $q : P(\xi) \rightarrow X$ induite par $\pi : E(\xi) \rightarrow X$.

Alors :

1) $q^*\xi$ contient le sous-fibré λ de rang 1, déterminé par les couples $(d, x) \in P(\xi) \times E(\xi)$ avec $x \in d$, de sorte que $q^*\xi \approx \lambda \oplus \xi'$;

2) $q^* : H^*(X) \rightarrow H^*(P(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Pour prouver 2), considérons le produit tensoriel externe $\xi \hat{\otimes} \eta$ sur $X \times PC^k$, $k \geq n$, où η est le fibré vectoriel canonique de rang 1 sur PC^k . Si $(\xi \hat{\otimes} \eta)_0$ est le complémentaire de la section nulle, on a une application

$f: (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 \rightarrow P(\xi)$ associant à $x \otimes z$ la droite passant par xz dans ξ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 & \xrightarrow{f} & P(\xi) \\ \pi \times \pi' \downarrow & & \downarrow q \\ X \times PC^k & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

est évidemment commutatif. On va montrer que $(p \circ (\pi \times \pi'))^*$ est injectif, ce qui impliquera 2) en vertu de la relation $f^* \circ q^* = (p \circ (\pi \times \pi'))^*$. Ecrivons la suite exacte de Gysin du fibré vectoriel $\xi \hat{\otimes} \eta$:

$$\begin{aligned} H^{i-2n}(X \times PC^k) & \xrightarrow[\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)]{\text{mult. par}} H^i(X \times PC^k) \xrightarrow{(\pi \times \pi')^*} \\ & \longrightarrow H^i(\xi \hat{\otimes} \eta)_0 \rightarrow H^{i-2n+1}(X \times PC^k) \end{aligned}$$

Comme $H^*(X \times PC^k) \approx H^*(X)[t]/t^{k+1}$ en vertu de la formule de Künneth (c'est ici que les coefficients entiers jouent un rôle) et p^* applique $H^i(X)$ identiquement sur les constantes de degré total i dans $H^*(X)[t]/t^{k+1}$, on doit donc montrer que ces dernières ne sont pas divisibles par $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)$, en utilisant l'exactitude de la suite ci-dessus. Ecrivons $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = a_n + a_{n-1}t + \dots + a_0t^n$ avec $a_i \in H^{2(n-i)}(X)$. Si x est un point de X , alors $\xi \hat{\otimes} \eta|_{x \times PC^k} \approx \mathbf{C}^n \hat{\otimes} \eta \approx \eta \oplus \dots \oplus \eta$, par naturalité de la classe d'Euler, l'injection $i: x \times PC^k \rightarrow X \times PC^k$ vérifie $i^* \chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta \oplus \dots \oplus \eta) = t^n$, puisque $X(\eta) = t$ par définition. Mais $i^*(a_j) = 0$ pour $j > 0$ et $i^*(a_0) = a_0$, donc $a_0 = 1$. Cela implique la non divisibilité en question.

En faisant subir à ξ' la même opération qu'à ξ , et ainsi de suite, on obtient:

si $D(\xi)$ désigne l'espace des drapeaux de ξ , formé des suites ordonnées de n droites linéairement indépendantes dans les fibres de ξ , et $q: D(\xi) \rightarrow X$ la projection induite par celle de ξ , alors:

- 1) $q^*\xi \approx \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i$ avec rang $\lambda_i = 1$;
- 2) $q^*: H^*(X) \rightarrow H^*(D(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Remarques :

1) $D(\xi)$ est homotopiquement équivalent à l'espace $DU(\xi)$ des suites ordonnées de n droites orthogonales dans les fibres de ξ , relativement à un

produit scalaire quelconque dans ξ , paramétré par les fibres. Si P est le U_n -fibré principal formé par les bases orthonormées de ξ , alors $DU(\xi) = E(P)/T$, avec

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & U_1 \end{pmatrix}.$$

2) Le principe de clivage reste valable pour les fibrés vectoriels réels, à condition de remplacer les coefficients entiers par Z_2 . En effet, dans la démonstration ci-dessus, on doit remplacer PC^k par PR^k et la formule de Künneth ne reste juste que pour les coefficients Z_2 . (Rappelons que $H^i(PR^k; Z) \approx Z_2$ pour i impair $< k$).

RÉFÉRENCES

- [1] CHEVALLEY, C. *Theory of Lie groups*.
- [2] SERRE, J.-P. *Algèbres de Lie semi-simples complexes*.
- [3] HUSEMOLLER, D. *Fibre bundles*.
- [4] BOREL, A. and F. HIRZEBRUCH. « Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III ». *Am. J. of Math.* 1958, 59, 60.
- [5] STEENROD, N. *The topology of fibre bundles*.

(Reçu le 18 mars 1969)

Serge Maumary
 Institute for Advanced Studies
 Princeton, New-Jersey
 U. S. A.