

# §1. Morphisms from an analytic space into $B$ ( $K$ )

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

whenever  $x \in \overset{\circ}{K}$ , we get  $a = \inf_K |h(x)| > 0$ . Hence  $\|hf\| = \sup_K |hf(x)| \geq \geq a \sup_K |f(x)| = a \|f\|$ .

(i')  $\Rightarrow$  (ii). Suppose that  $X \cap \overset{\circ}{K} \neq \emptyset$  and  $x = (x_1, x_2) \in X \cap \overset{\circ}{K}$ . We choose an analytic function  $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbf{C}$ , where  $U_1 \supset K_1$ , and  $U_1$  is open, such that  $f_1(x_1) = 1$ ,  $|f_1(z)| < 1$  if  $z \in K_1$ ,  $z \neq x_1$ . Similarly we choose an analytic function  $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbf{C}$ , with the same properties. Consider the function  $f \in B(K) : (z_1, z_2) \rightarrow f_1(z_1)f_2(z_2)$ . Since  $h(x) = 0$  it follows that the sequence  $\{hf^n\}$  converges pointwise to 0 in  $K$ .

Applying Dini's theorem we get  $\|hf^n\| \rightarrow 0$ . From the inequality  $a \|f^n\| \leq \|hf^n\|$  we get  $\|f^n\| \rightarrow 0$ , which is a contradiction, because for every  $n : f^n(x) = 1$ .

(b) Use the Weierstrass preparation theorem (extended form).

*Question.* Does the condition (ii) imply that  $h : B(K) \rightarrow B(K)$  is a split monomorphism?

#### IV. FLATNESS AND PRIVILEGE

##### § 1. Morphisms from an analytic space into $B(K)$

Let  $S$  be an analytic space and  $K$  a polycylinder in an open set  $U \subset \mathbf{C}^n$ . We want to construct an  $\mathcal{O}_S$ -algebra homomorphism  $\phi : \mathcal{O}_{S \times U}(S \times U) \rightarrow \mathcal{H}(S; B(K))$ .

(a) Consider first  $S = U' \subset \mathbf{C}^m$ ,  $U'$ -open. If  $h \in \mathcal{O}_{U' \times U}(U' \times U)$  and  $s \in U'$ ,  $x \in K$ , define  $(\phi(h)(s))(x) = h(s, x)$ . Using the Cauchy integral, one can show that  $\phi(h)$  is analytic. On the other hand it's obvious that  $\phi$  is an  $\mathcal{O}_{U'}$ -algebra homomorphism.

(b) Let  $S$  have a special model in the polydisc  $\Delta$  in  $\mathbf{C}^m$ , defined by a sheaf  $\mathcal{I}$  of ideals of  $\mathcal{O}_\Delta$ , and let  $\mathcal{J}$  be generated by  $f_1, \dots, f_p$ ,  $V$ -a polycylinder neighbourhood of  $K$  in  $U$ . By Cartan's theorem  $B$  for a polycylinder,

the sequence  $0 \rightarrow \mathcal{I}(\Delta \times V) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta \times V) \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}(S \times V) \rightarrow 0$  is exact. If we denote by  $\tilde{\pi}$  the projection  $\mathcal{H}(\Delta, B(K)) \rightarrow \mathcal{H}(S, B(K))$ ,  $(f_1, \dots, f_p) \cdot \mathcal{H}(\Delta, B(K)) \subset \subset \text{Ker } \tilde{\pi}$ . Therefore, because  $\pi$  is surjection, there exists a unique

$\phi : \mathcal{O}(S \times V) \rightarrow \mathcal{H}(S, B(K))$ , such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\Delta \times V) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H}(\Delta, B(K)) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \mathcal{O}(S \times V) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H}(S, B(K)) \end{array}$$

is commutative;  $\phi$  is evidently an  $\mathcal{O}_S$ -algebra homomorphism.

§ 2. *The flatness and privilege theorem*

*Notation*

Let  $S$  be an analytic space,  $U$  an open set in  $\mathbb{C}^n$ , and  $\pi : S \times U \rightarrow S$  the first projection.

If  $\mathcal{F}$  is an  $\mathcal{O}_{S \times U}$  module, then for every  $s \in S$  we denote by  $\mathcal{F}(s)$  the  $\mathcal{O}_U$ -module  $i_s^* \mathcal{F}$ , where  $i_s$  is the injective morphism  $x \rightarrow (s, x)$  from  $U$  into  $S \times U$ . If  $x \in U$

$$(\mathcal{F}(s))_x \simeq \mathcal{F}_{(s, x)} / m_s \cdot \mathcal{F}_{(s, x)} \simeq \mathcal{F}_{(s, x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S, s}} \mathbb{C}_s.$$

*Theorem 1:* Let  $\mathcal{E}$  be a coherent and  $S$ -flat  $\mathcal{O}_{S \times U}$ -module, and  $K$  a poly-cylinder in  $U$ .

(a) When  $K$  is privileged for  $\mathcal{E}(s_0)$ ,  $s_0$  has a neighbourhood  $V$  such that  $K$  is  $\mathcal{E}(s)$ -privileged for each  $s \in V$ . In other words: the set  $S' = \{s \in S \mid K \text{ is } \mathcal{E}(s)\text{-privileged}\}$  is open in  $S$ .

(b) It is possible to define a Banach vector bundle over  $S'$  whose fibre at any  $s \in S'$  is  $B(K, \mathcal{E}(s))$ .

To prove the theorem we need:

*Lemma 1:* Under the conditions of the theorem, we can, for every  $s \in S$ , find a neighbourhood  $W$  of  $\{s\} \times K$  and a free resolution of finite length

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p \xrightarrow{d_p} \dots \xrightarrow{d_2} \mathcal{L}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{E} \rightarrow 0 \text{ in } W.$$

*Proof:* Let  $(s, x)$  be a point of  $S \times U$  and  $\mathcal{L}_*^0$  a finite resolution of  $\mathcal{F}(x)$  in a neighbourhood of  $x$  (there exists such one, by the theorem of syzygies). We shall show that there exists a resolution  $\mathcal{L}^*$  of  $\mathcal{F}$  in a neighbourhood of  $(s, x)$  such that  $\mathcal{L}^*(s) = \mathcal{L}_*^0$ ; if  $\mathcal{L}_i^0 = \mathcal{O}_x^{r_i}$  define

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{S \times U}^{r_i} \text{ and } \mathcal{K}_i^0 = \text{Ker } d_i^0 : \mathcal{L}_i^0 \rightarrow \mathcal{L}_{i-1}^0.$$