

# Main Theorem

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

extension of  $\gamma_v$ . Let us now put  $\hat{\xi}_{(v)}^{(1)} = \hat{\xi}_{(v)}^* - \sum a_{v\lambda} \hat{b}_\lambda - \delta \hat{\gamma}_v$ . Here  $\hat{\xi}_{(v)}^{(1)} \in C^l(\hat{\mathfrak{U}}_7^*(\rho_3), \mathbb{F})$ . Using the previous estimates and the fact that the  $\hat{b}_\lambda$  are finite we find that  $\|\hat{\xi}_{(v)}^{(1)}\|_{\rho_3} \leq K \|\hat{\xi}_{(v)}\|_{\rho_4} \leq K \|\hat{\xi}\|_{\rho}$ .

Now we also have  $\hat{\xi}_{(v)}^{(1)}|_{X_0} = 0$ . It follows that

$$\|\hat{\xi}_{(v)}^{(1)}\|_{\rho} \leq \gamma/\gamma' \|\hat{\xi}_{(v)}^{(1)}\|_{\rho_3} \leq \gamma/\gamma' \cdot K \|\hat{\xi}\|_{\rho}.$$

Finally we put in  $\hat{\mathfrak{U}}_9^*(\rho)$ :

$$\begin{aligned} \hat{\xi}^{(1)} &= \sum \hat{\xi}_{(v)}^{(1)} (t/\rho)^v = \\ &= \sum \hat{\xi}_{(v)} (t/\rho)^v - \sum \hat{\eta}_v (t/\rho)^v - \sum a_{v\lambda} (t/\rho)^v \hat{b}_\lambda - \delta (\sum \hat{\gamma}_v (t/\rho)^v) \\ &= \hat{\xi} - \hat{\eta} - \sum a_\lambda \hat{b}_\lambda - \delta \hat{\gamma}. \end{aligned}$$

Using the fact that the sum of the absolute values of the coefficients in the power series expansion of  $\hat{\xi}_{(v)}^{(1)}$  by  $(t/\rho)$  is smaller than  $\gamma/\gamma' \cdot K \|\hat{\xi}\|_{\rho}$  and that with respect to  $\hat{\eta}_v$  is smaller than  $\gamma''' \cdot K \|\hat{\xi}\|_{\rho}$  we find:  $\|\hat{\xi}^{(1)}\|_{\rho} \leq \gamma/\gamma' \cdot K \|\hat{\xi}\|_{\rho}$  and  $\|\hat{\eta}\|_{\rho} \leq \gamma''' \cdot K \|\hat{\xi}\|_{\rho}$  and  $\|a_\lambda\|_{\rho} \leq K \|\hat{\xi}\|_{\rho}$ . We take the restriction to  $\hat{\mathfrak{B}}(\rho)$  and now  $\tilde{\xi} = \hat{\xi}^{(1)} - \hat{\eta} \in Z^l(\hat{\mathfrak{B}}(\rho), \mathbb{F})$  is the desired element. Of course we have to choose  $\rho_4$  and then  $\rho_2$  small enough, for example let  $\gamma''' < \varepsilon/2 K$  and  $\gamma \leq \varepsilon\gamma'/2 K$ .

### MAIN THEOREM

There exists  $\rho_2$  and a constant  $K$  such that if  $\rho \leq \rho_2$  and  $\hat{\xi} \in Z^l(\hat{\mathfrak{U}}(\rho), \mathbb{F})$  with  $\|\hat{\xi}\|_{\rho} < \infty$  then we can find  $a_1, \dots, a_r \in I(E^n(\rho))$  and  $\hat{\eta} \in C^{l-1}(\hat{\mathfrak{B}}(\rho), \mathbb{F})$  such that  $\hat{\xi} = \sum a_\lambda \hat{b}_\lambda + \delta \hat{\eta}$  on  $\hat{\mathfrak{B}}(\rho)$  with  $\|\hat{\eta}\|_{\rho}$  and  $\|a_v\|_{\rho} \leq K \|\hat{\xi}\|_{\rho}$ .

*Proof.* We have one constant  $K$  from the smoothing theorem. Now we find  $\rho_2$  with an  $\varepsilon$  in the Approximation Lemma such that  $\varepsilon \cdot K < 1/2$ . We shall use this  $\rho_2$  and prove the theorem here. We are given  $\hat{\xi}_0 = \hat{\xi} \in Z^l(\hat{\mathfrak{U}}(\rho), \mathbb{F})$  with  $\|\hat{\xi}\|_{\rho} < \infty$ . The Approximation Lemma gives  $\tilde{\xi}_1 =$

$= \hat{\xi} - \sum a_{1\lambda} \hat{\mathbf{b}}_\lambda - \hat{\delta}\gamma_1$  on  $\hat{\mathfrak{B}}(\rho)$ . Here  $\hat{\gamma}_1 \in C^{l-1}(\hat{\mathfrak{B}}(\rho), \mathbf{F})$  and  $\|\hat{\xi}_1\|_\rho \leq \varepsilon \|\hat{\xi}\|_\rho$ . Now  $\hat{\xi}_1 \in Z^l(\hat{\mathfrak{B}}(\rho), \mathbf{F})$ . The Smoothing Theorem gives  $\hat{\xi}_1 \in Z^l(\hat{\mathfrak{U}}(\rho), \mathbf{F})$  and  $\hat{\eta}_1 \in C^{l-1}(\hat{\mathfrak{B}}(\rho), \mathbf{F})$  such that  $\hat{\xi}_1 = \tilde{\xi}_1 + \hat{\delta}\eta_1$  on  $\hat{\mathfrak{B}}(\rho)$ . Here  $\|\eta_1\|_\rho$  and  $\|\hat{\xi}_1\|_\rho \leq K \|\tilde{\xi}_1\|_\rho < 1/2 \|\hat{\xi}\|_\rho$ . Now we use  $\hat{\xi}_1$  instead of  $\hat{\xi}_0$  as above and get:  $\hat{\xi}_2 = \hat{\xi}_1 + \hat{\delta}\eta_2 - \sum a_{2\lambda} \hat{\mathbf{b}}_\lambda - \hat{\delta}\gamma_2$ . Here  $\|\hat{\xi}_2\|_\rho$  and  $\|\hat{\eta}_2\|_\rho < 1/2 \|\hat{\xi}_1\|_\rho < (1/2)^2 \|\hat{\xi}\|_\rho$  and  $\|a_{2\lambda}\|_\rho$  and  $\|\gamma_2\|_\rho \leq \frac{K}{2} \|\hat{\xi}\|_\rho$ . Inductively we get:  $\hat{\xi}_n = \hat{\xi}_{n-1} - \sum a_{n\lambda} \hat{\mathbf{b}}_\lambda - \hat{\delta}\gamma_n + \hat{\delta}\eta_n$ . Here  $\|\hat{\xi}_n\|_\rho < 2^{-n} \|\hat{\xi}\|_\rho$ ,  $\|\hat{\eta}_n\|_\rho \leq 2^{-n} \|\hat{\xi}\|_\rho$  and  $\|a_{n\lambda}\|_\rho$  and  $\|\gamma_n\|_\rho \leq 2^{-n+1} \cdot K \|\hat{\xi}\|_\rho$  for  $n = 1, 2, 3, \dots$ . A summation is now possible. We get  $0 = \hat{\xi} - \sum_{n,\lambda} a_{n\lambda} \hat{\mathbf{b}}_\lambda - \sum \hat{\delta}\gamma_n + \sum \hat{\delta}\eta_n$ . We put  $a_\lambda = \sum_n a_{n\lambda}$ ,  $\hat{\eta} = \sum (-\hat{\gamma}_n + \hat{\eta}_n)$  and the theorem follows.

For the proof of the coherence the Main Theorem is needed in a weaker and simpler form.

*Main Theorem (\*)*: There exists a positive  $n$ -tuple  $\rho_2 \leq \rho_0$  and cross-sections  $S_1, \dots, S_r \in \Gamma(E^n(\rho_2), \psi_{(l)}(\mathbf{F}))$  such that any  $S = \psi_{(l)}(\hat{\xi}') \in \Gamma(E^n(\rho'), \psi_{(l)}(\mathbf{F}))$  with  $\hat{\xi}' \in H^l(X(\rho'), \mathbf{F})$  can be written over  $E^n(\rho)$  in the form  $S = \sum_1^n a_\lambda S_\lambda$  with  $a_1, \dots, a_r \in I(E^n(\rho))$ . Here  $\rho \leq \rho_2$  and  $\rho < \rho' \leq \rho_0$ .

*Proof.* Define  $S_\lambda = \psi_{(l)}(\hat{\mathbf{b}}_\lambda | X(\rho_2))$ . The cross-section  $S$  can be written in the form  $S = \psi_{(l)}(\hat{\xi}')$  with  $\hat{\xi}' \in Z^l(\hat{\mathfrak{U}}'(\rho'), \mathbf{F})$ . We put  $\hat{\xi} = \hat{\xi}' | \mathfrak{U}(\rho)$ . Then  $\|\hat{\xi}\|_\rho < \infty$  and we have the representation  $\hat{\xi} = \sum a_\lambda \hat{\mathbf{b}}_\lambda + \hat{\delta}\eta$ . For the cohomology classes we get  $\hat{\xi} = \sum a_\lambda \hat{\mathbf{b}}_\lambda$  and for the images  $S | E^n(\rho)$ , this gives  $S | E^n(\rho) = \psi_{(l)}(\hat{\xi}) = \sum a_\lambda S_\lambda$ .

The immediate consequence of this form of the Main Theorem is that the stalk of  $\psi_{(l)}(\mathbf{F})$  at the origin (and hence at every point of course) is finitely generated. However this is not yet the full coherence of  $\psi_{(l)}(\mathbf{F})$ . Nevertheless, the Main Theorem above contains all that is essential, and the rest of the proof is not difficult. We refer to [1, pp. 54-58], or to Knorr [2] for details.