

# UNE REMARQUE SUR (1+it)

Autor(en): **Narasimhan, Raghavan**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-42348>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## UNE REMARQUE SUR $\zeta(1+it)$

par Raghavan NARASIMHAN

Le but de cette note est de donner une démonstration du fait que la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann ne s'annule pas sur la droite  $\operatorname{Re} s = 1$ . Cette démonstration est, en quelque sorte, plus naturelle que la démonstration habituelle basée sur l'inégalité  $3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta \geq 0$ . Elle est une variante d'une démonstration due à A.E. Ingham. Pour être complet, on a ajouté des démonstrations de quelques résultats classiques.

*Lemme 1.* La fonction  $\zeta$ , définie dans le demi-plan  $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$  par la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

possède un prolongement analytique au demi-plan  $\operatorname{Re} s > -1$ ; elle est méromorphe dans ce dernier demi-plan, et sa seule singularité est un pôle simple au point  $s = 1$ .

*Preuve.* On pose

$$P(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \quad \text{pour } 0 \leq x < 1,$$

et on étend  $P$  à toute la droite par périodicité:  $P(x+n) = P(x)$  pour un entier  $n$ . On obtient, par sommation partielle,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= s \int_1^{\infty} \frac{P'(x)}{x^{s+1}} dx + \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re} s > 1 \\ &= s(s+1) \int_1^{\infty} \frac{P(x)}{x^{s+2}} dx + \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Puisque  $P$  est bornée, l'intégrale converge uniformément dans tout demi-plan  $\operatorname{Re} s \geq -1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , ce qui démontre le lemme.

*Lemme 2.* (Landau) Soit  $f$  une fonction définie dans un demi-plan  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$  par une série de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Supposons que  $\operatorname{Re} a_n \geq 0$  et que la série  $\sum \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^s}$  ne converge en aucun point  $s = \sigma_0 - \delta$ ,  $\delta > 0$ . Alors  $f$  est singulière au point  $s = \sigma_0$ .

*Preuve.* Si  $f$  est régulière au point  $s = \sigma_0$ , et si  $\sigma_1 > \sigma_0$ , la série de Taylor

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(\sigma_1)}{m!} (s - \sigma_1)^m$$

converge dans l'intervalle  $\sigma_0 - \delta < s < \sigma_1$ , pour un certain  $\delta > 0$ .

En particulier, la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} f \frac{(\sigma_1 - s)^m}{m!} (-1)^m \operatorname{Re} f^{(m)}(\sigma_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 - s)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{Re} a_n) (\log n)^m}{n^{\sigma_1}}$$

converge pour  $\sigma_0 - \delta < s < \sigma_1$ . Puisqu'on a une série à termes positifs, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^{\sigma_1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 - s)^m}{m!} (\log n)^m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^{\sigma_1}} n^{\sigma_1 - s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} a_n}{n^s}$$

converge pour  $\sigma_0 - \delta < s < \sigma_1$ ; contradiction.

*Lemme 3.* Si  $f(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  converge absolument dans le demi-plan  $\operatorname{Re} s > 1$ , alors la fonction  $e^{f(s)} = F(s)$  est développable en série de Dirichlet  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$  dans un demi-plan  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ . De plus, si  $a_n \geq 0$ , on a  $b_n \geq a_n \geq 0$ .

Vérification directe.

*Théorème.* Pour  $a \neq 0$ ,  $\zeta(1+ia) \neq 0$ .

*Preuve.* Supposons que, pour un  $a \neq 0$ ,  $\zeta(1+ia) = 0$ . Alors  $\zeta(s)$  étant réel pour  $s$  réel,  $s > 1$ , on a  $\zeta(1-ia) = 0$ . Soit

$$F(s) = \zeta^2(s) \zeta(s+ia) \zeta(s-ia), \operatorname{Re} s > -1.$$

$F$  est holomorphe, dans le demi-plan  $\operatorname{Re} s > -1$  en vertu du Lemme 1 et de l'hypothèse  $\zeta(1+ia) = 0$ . Du produit d'Euler de  $\zeta(s)$ , on déduit immédiatement que  $F(s) = e^{f(s)}$ , où

$$f(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + p^{ia} + p^{-ia}}{k p^{ks}} = 2 \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(k a \log p)}{k p^{ks}};$$

ici  $p$  parcourt les nombres premiers. Les coefficients de cette série sont positifs. Des trois lemmes, on déduit que pour tout  $p$ , la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(k a \log p)}{k p^{ks}}$$

converge pour  $-1 < s < \infty$ . Puisque  $k p^{ks} \rightarrow 0$  si  $-1 < s < 0$ , il s'en suit que  $1 + \cos(k a \log p) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Mais ceci est impossible, parce que on aurait alors  $1 + \cos(2k a \log p) = 2 \cos^2(k a \log p) \rightarrow +2$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Cette contradiction établit le théorème.

*Remarque.* Si on dispose des propriétés de  $\zeta$  dans tout le plan, on voit immédiatement que  $F(-2) = 0$ , et que la série  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  converge au point  $s = -2$  (même raisonnement qu'avant), ce qui impliquerait  $a_n \equiv 0$ . Mais  $F \not\equiv 0$ .

Cette démonstration se généralise, par exemple, à la fonction  $\zeta$  d'un corps de nombres algébriques.