

# L'HYPOTHÈSE DE FERMAT POUR LES EXPOSANTS NÉGATIFS

Autor(en): **Thérond, Jean-Daniel**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-42350>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# L'HYPOTHÈSE DE FERMAT POUR LES EXPOSANTS NÉGATIFS

par Jean-Daniel THÉRON

Cette note modifie celle parue sous le même titre dans le tome XIII, fascicule 4 (1967) de cette revue, pp. 247-252.

A la page 247, avant-dernière ligne, c'est « ne soit pas divisible » qu'il faut lire, et les solutions données dans les théorèmes 2 (p. 248) et 4 (p. 249) ne sont pas complètes. Pour le premier, il faut le remplacer par :

THÉORÈME 2. *Les racines primitives de l'équation diophantienne*  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

*sont*

$$x = p(p+q), \quad y = q(p+q), \quad z = pq$$

*où  $p$  et  $q$  sont des entiers non nuls premiers entre eux.*

*Démonstration :* Soit  $t = (x, y)$ , alors  $x = tp$  et  $y = tq$  avec  $(p, q) = 1$  et l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{tp} + \frac{1}{tq} = \frac{1}{z} \text{ implique } z = \frac{tpq}{p+q}.$$

Or  $(p, q) = 1$  donc  $(p+q, pq) = 1$ ; ainsi, puisque  $z \in \mathbb{Z}^*$ ,  $t = m(p+q)$  d'où  $x = mp(p+q)$ ,  $y = mq(p+q)$  et  $z = mpq$ . En divisant par  $m$  on obtient alors les racines primitives annoncées.

Le théorème 3 (p. 249) peut être remplacé par la formulation équivalente :

THÉORÈME 3. *Les racines primitives non triviales de l'équation diophantienne*  $x^2 + y^2 = z^2$  *sont*

$$x = 2ab \quad y = a^2 - b^2 \quad z = a^2 + b^2$$

*où  $a$  et  $b$  sont des entiers différents premiers entre eux.*

Quant au théorème 4, il doit être modifié ainsi:

**THÉORÈME 4.** *Les racines primitives de l'équation diophantienne*

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2} \text{ sont}$$

$$x = 2ab(a^2 + b^2) \quad y = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \quad z = 2ab(a^2 - b^2)$$

où  $a$  et  $b$  sont des entiers non nuls, différents, premiers entre eux.

*Démonstration :* Soit  $t = (x, y)$  d'où  $x = tx_1$  et  $y = ty_1$  où  $(x_1, y_1) = 1$ .

L'équation

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{t^2 x_1^2} + \frac{1}{t^2 y_1^2} = \frac{1}{z^2} \text{ implique } z^2 = \frac{t^2 x_1^2 y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}$$

Or  $(x_1, y_1) = 1$  d'où  $(x_1^2 + y_1^2, x_1^2 y_1^2) = 1$ ; ainsi  $t^2 = l(x_1^2 + y_1^2)$  et  $z^2 = lx_1^2 y_1^2$  d'où  $l = m^2$  et  $t^2 = m^2(x_1^2 + y_1^2)$ . Ainsi  $x_1^2 + y_1^2$  est un carré, ce qui donne, d'après le théorème 3,  $x_1 = 2ab$ ,  $y_1 = a^2 - b^2$  et  $t^2 = m^2(x_1^2 + y_1^2) = m^2(a^2 + b^2)^2$  d'où  $t = m(a^2 + b^2)$ . On obtient alors  $x = tx_1 = m \cdot 2ab(a^2 + b^2)$ ,  $y = ty_1 = m(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ ,  $z = mx_1 y_1$  c'est à dire  $z = m2ab(a^2 - b^2)$  d'où le résultat annoncé en divisant par  $m$  pour que les racines soient primitives.

(Reçu le 30 avril 1969)

Institut de Mathématiques

Université de Montpellier