4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3.3).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Ce théorème est tout à fait analogue au théorème (2.3), à ceci près qu'il ne nous donne pas d'ordre de grandeur pour la quantité majorante. Nous allons combler cette lacune en démontrant le résultat suivant:

Théoreme (3.3). Quels que soient l'entier positif m et l'anneau d'entiers algébriques A, on a l'inégalité

$$v(m; A) \leqq 2^m + 8m^5.$$

Le théorème (3.3) généralise l'inégalité

$$v(m; A) \leqq 2^{m-1} + (m-1)/3 + 1$$

obtenue par Stemmler (voir [11]) dans le cas où l'exposant m est *premier*; l'ordre de grandeur est seulement un peu moins bon: 2^m au lieu de 2^{m-1} (ceci tient au fait qu'on est obligé, dans le cas général, d'envisager les valeurs *paires* de m).

4. Démonstration du théorème (3.3).

Lemme (4.1). Soient A un anneau, m un entier positif. et B un anneau quotient de A. On a alors l'inégalité

$$v(m; B) \leqslant v(m; A).$$

Lemme (4.2.) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_r$ des anneaux en nombre fini, et soit B leur produit. On a alors l'inégalité

$$w(m; B) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant r} w(m; A_i).$$

La démonstration de ces deux lemmes est immédiate; signalons seulement que le lemme (4.2) devient faux si on y remplace w par v (comme on le voit sur l'exemple suivant: $r = 2$, $m = 2$, et $A_1 = A_2 = \mathbf{R}$).

Lemme (4.3.) Soient A un anneau, m et s deux entiers positifs et $\mathfrak{a}$ un idéal de A ayant la propriété suivante:

tout élément de $\mathfrak{a}$ est de la forme

$$(4) \qquad \pm a_1^m \pm a_2^m \pm \ldots \pm a_s^m \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_s \in A);$$

on a alors l'inégalité

$$v(m; A) \leqq s + v(m; A/\mathfrak{a}).$$

Il suffit pour le voir d'appliquer la définition de $v(m; A)$.

Lemme (4.4). Soient A un *anneau d'entiers algébriques*, m et n deux entiers positifs et $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de A. on a alors l'inégalité

$$w(m; A/\mathfrak{p}^n) \leqq 8m^5.$$

Prouvons ce lemme: $\mathfrak{p}$ étant en fait un idéal *maximal* de A, on a un isomorphisme canonique

$$A/\mathfrak{p}^n \simeq A_p/\mathfrak{p}^n A_p$$

(voir [4], chap. II, § 3, n° 3, prop. 9); mais on a également un isomorphisme canonique

$$A_p/\mathfrak{p}^n A_p \simeq \hat{A}_p/\mathfrak{p}^n \hat{A}_p$$

(voir [4], chap. III, § 2, n° 12, formules (21), et n° 13, prop. 19). $A/\mathfrak{p}^n$ est donc isomorphe à un quotient de $\hat{A}_p$, d'où, en appliquant le lemme (4.1),

$$w(m; A/\mathfrak{p}^n) \leqq w(m; \hat{A}_p);$$

le lemme (4.4) résulte alors du théorème (2.3), et du fait que $\hat{A}_p$ est un anneau $\mathfrak{P}$-adique.

*

Venons-en alors à la démonstration du théorème (3.3). Soient A un anneau d'entiers algébriques et m un entier positif; l'identité bien connue (voir par exemple [5], th. 402)

$$(5) \qquad m!\,a = \sum_{h=o}^{m-1} \binom{m-1}{h} (-1)^{m-1-h} ((a+h)^m - h^m)$$

montre que tout élément de l'idéal $\mathfrak{a} = m!A$ est de la forme (4) (voir lemme (4.3)) avec

$$s = 2 \sum_{h=o}^{m-1} \binom{m-1}{h} = 2.2^{m-1} = 2^m;$$

le lemme (4.3) donne donc l'inégalité

$$v(m; A) \leqq 2^m + v(m; A/\mathfrak{a}).$$

D'autre part, dans $A/\mathfrak{a}$, qui est un anneau fini, -1 est somme de puissances m^{iemes}, d'où évidemment l'inégalité

$$v(m; A/\mathfrak{a}) \leqq w(m; A/\mathfrak{a}).$$

Il suffit donc en fait de prouver l'inégalité

(6) $$w(m; A/\mathfrak{a}) \leqq 8m^5;$$

or, dans A, qui est un anneau de Dedekind, l'idéal $\mathfrak{a}$ se décompose en facteurs premiers:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{n_1} \mathfrak{p}_2^{n_2} \dots \mathfrak{p}_r^{n_r}$$

(les $\mathfrak{p}_i$ premiers non nuls et deux à deux distincts, les $n_i > 0$), et le « théorème chinois » (voir par exemple [4], chap. II, § 1, nº 2, prop. 5) donne un isomorphisme canonique

$$A/\mathfrak{a} \simeq (A/\mathfrak{p}_1^{n_1}) \times (A/\mathfrak{p}_2^{n_2}) \times \dots \times (A/\mathfrak{p}_r^{n_r});$$

l'inégalité (6) résulte alors immédiatement des lemmes (4.2) et (4.4). Et le théorème (3.3) se trouve démontré.

*

Deux remarques pour terminer:

a) Tout d'abord, si l'exposant m est *impair*, on peut, au lieu de (5), utiliser l'identité

$$m\,!\,(a + (m-1)/2) = \sum_{m-1}^{h=o} \binom{m-1}{h} (-1)^{m-1-h} (a+h)^m ,$$

qui n'en est d'ailleurs qu'une écriture différente; la démonstration ci-dessus mène alors à la majoration plus précise

$$v\,(m; A) \leqslant 2^{m-1} + 8m^5.$$

b) Si maintenant l'exposant m est *premier impair*, l'inégalité (6) peut être remplacée par celle-ci:

(8) $$w\,(m; A/\mathfrak{a}) \leqslant 2m - 1;$$

il suffit pour le voir d'appliquer le résultat signalé dans les dernières lignes du paragraphe2. Remplaçant dans la démonstration ci-dessus l'identité (5) par l'identité (7) et la majoration (6) par la majoration (8), on obtient alors l'inégalité

$$v\,(m; A) \leqq 2^{m-1} + 2m - 1,$$

toujours pour un anneau d'entiers algébriques A, bien entendu.

*