SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA «MÉTHODE DE L'HYPERBOLE» DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

Autor(en): **Saffari, Bahman**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-42352

SUR QUELQUES APPLICATIONS
DE LA « MÉTHODE DE L'HYPERBOLE » DE DIRICHLET
A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

Bahman SAFFARI

I. INTRODUCTION

1. La « méthode de l'hyperbole » que nous exposons ci-après sur quelques exemples est une méthode élémentaire donnant de bons résultats dans les théorèmes asymptotiques. Certaines questions de théorie des nombres se ramènent au problème suivant: donner une évaluation asymptotique, lorsque $x \to +\infty$, de $F(x) = \sum_{1 \leqq n \leqq x} f(n)$, où f est le « produit de convolution » de deux fonctions arithmétiques [1]) g et h, définie par:

$$f(n) = (g*h)(n) = \sum_{k \mid n} g(k)\, h\left(\frac{n}{k}\right).$$

Connaissant $G(x) = \sum_{1 \leqq k \leqq x} g(k)$ et $H(x) = \sum_{1 \leqq l \leqq x} h(l)$, on peut évaluer $F(x)$ grâce à:

$$F(x) = \sum_{1 \leqq k \leqq x} g(k)\, H\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{1 \leqq l \leqq x} h(l)\, G\left(\frac{x}{l}\right). \tag{1}$$

Les résultats que l'on obtient par application de (1) sont au plus aussi bons que ceux obtenus par le procédé suivant (méthode de l'hyperbole):
Pour tout ξ tel que $1 \leqq \xi \leqq x$, on a:

$$F(x) = \sum_{1 \leqq k \leqq \xi} g(k)\, H\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{1 \leqq l \leqq \frac{x}{\xi}} h(l)\, G\left(\frac{x}{l}\right) - G(\xi)\, H\left(\frac{x}{\xi}\right). \tag{2}$$

Chacun des trois termes du second membre de (2) fournit un terme-erreur, le terme-erreur global résultant alors de l'addition de ces trois termes-erreurs. On choisit ξ de manière que le terme-erreur global devienne le meilleur possible. Le nom de la « méthode de l'hyperbole » vient de ce que $F(x)$ est la somme des $g(k)\, h(l)$ où (k, l) décrit les points à coordonnées

1) Par « fonction arithmétique » nous entendons ici une fonction à valeurs réelles ou complexes, et définie sur les entiers $\geqq 1$.

entières > 0 en dessous de l'hyperbole d'équation $uv = x$, et que la formule (2) constitue, pour le calcul de cette somme, un procédé dont la signification géométrique est évidente.

2. Le premier exemple historique (Dirichlet [1]) est celui du cas $g(n) = h(n) = 1$. Alors $f(n) = d(n) =$ nombre des diviseurs de n. Il est alors bien connu [2]) que la formule (1) donne:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + O(x),$$

tandis que la méthode de l'hyperbole donne, avec $\xi = \sqrt{x}$:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3}$$

γ désignant la constante d'Euler.

Cependant on démontre, par des méthodes analytiques, qu'en fait le terme-erreur de (3) est $O(x^c)$, pour une constante convenable $c < \frac{1}{3}$ (cf. par exemple [2] et [3]).

3. Nous démontrons ci-dessous, par la méthode de l'hyperbole, certains résultats nouveaux, que l'on ne peut guère rendre plus précis par des méthodes analytiques (cependant voir ci-dessous IV).

II. Sur un théoreme de Hardy et Ramanujan

1. Soit $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers distincts de l'entier positif n. Hardy et Ramanujan [4] ont prouvé que, lorsque $x \to +\infty$:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega(n) = x \log \log x + Bx + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

où B est une constante $\left[B = \gamma + \sum_{p} \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)\right.$, la sommation étant étendue à tous les p premiers [3])$\left.\right]$. De plus, Hardy et Ramanujan ([4], p. 347) annoncent que ce théorème asymptotique peut être amélioré « par des méthodes transcendantes ». Cependant, à notre connaissance, aucune telle amélioration n'a été publiée à ce jour.

Nous démontrons ici:

---

2) Voir par exemple [12] ou [13].

3) Dans tout cet article, les lettres $p, p', p'', \ldots$ désigneront exclusivement des nombres premiers; la lettre q désignera exclusivement les entiers « quadratfrei ».

THÉORÈME 1. *Pour deux entiers donnés $k, l\,(k \geqq 1)$, premiers entre eux, soit $\omega_{k,l}(n)$ le nombre des diviseurs premiers distincts p de n tels que $p \equiv l \pmod{k}$. Alors, lorsque $x \to +\infty$, on a pour tout entier $m \geqq 1$:*

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log\log x}{\varphi(k)} + B_{k,l}x + \sum_{r=1}^{m} \frac{C_r}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right],$$

$B_{k,l}$ étant une constante dépendant de k et l, $\varphi(k)$ étant la fonction d'Euler, et les constantes C_r étant définies de la façon suivante (en notant par $\{t\}$ la partie fractionnaire [4]) de t) :

$$C_r = -\int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} (\log t)^{r-1}\, dt = \frac{(-1)^{r-1}}{r} \cdot \frac{d^r}{ds^r}\left(\frac{(s-1)\zeta(s)}{s}\right)_{s=1}$$

[*et en particulier* $C_1 = \gamma - 1$].

Le théorème 1 est une conséquence du résultat plus précis suivant:

THÉORÈME 2. *Soit $\pi_{k,l}(x)$ le nombre de nombres premiers $p \leqq x$ tels que $p \equiv l \pmod{k}$, et soient C, α, β, trois constantes (avec $C > 0$, $\alpha > 0$) telles que, lorsque $x \to +\infty$, on ait :*

$$\pi_{k,l}(x) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left[x \exp\left(-C(\log x)^\alpha (\log\log x)^\beta\right)\right] \text{ [5]}).$$

Alors il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour $x \to +\infty$:

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log\log x}{\varphi(k)} + B_{k,l}x - \frac{x}{\varphi(k)} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2(\log x - \log t)}\, dt +$$

$$+ O\left[x \exp\left(-C'(\log x)^\alpha (\log\log x)^\beta\right)\right].$$

En admettant l'hypothèse de Riemann généralisée concernant les séries L relatives aux caractères modulo k [hypothèse que nous désignerons désormais par (H_k)], on peut considérablement améliorer le terme-erreur du théorème 2, grâce au:

---

4) Dans toute la suite, $[t]$ désignera la partie entière du nombre réel t, et $\{t\} = t - [t]$ sa partie fractionnaire.

5) Dans le cas général, on sait que cette relation est vraie avec $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (cf. [14], p. 46). Dans le cas $k = l = 1$ de tous les nombres premiers, on sait qu'on peut prendre $\alpha = \frac{3}{5}$, $\beta = -\frac{1}{5}$ (cf. [15]).

THÉORÈME 3. *Moyennant l'hypothèse* (H_k), *on a lorsque* $x \to +\infty$:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log\log x}{\varphi(k)} + B_{k,l}x - \frac{x}{\varphi(k)} \int_1^{x^{\frac{1}{3}}(\log x)^{-\frac{4}{3}}} \frac{\{t\}}{t^2(\log x - \log t)} dt + $$

$$+ O\left[x^{\frac{2}{3}}(\log x)^{\frac{1}{3}}\right]$$

2. *Démonstration des théorèmes 1 à 3.*

a) *Calcul préparatoire*. Soient x et ξ tels que $1 < \xi < x$. Alors:

$$(4) \qquad \sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \frac{x \log\log x}{\varphi(k)} + B_{k,l}x - \frac{x}{\varphi(k)} \int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{\{t\}}{t^2(\log x - \log t)} dt -$$

$$- x \int_\xi^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2} dt + \left\{\frac{x}{\xi}\right\} \eta_{k,l}(\xi) + \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) - \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \left\{\frac{x}{p}\right\},$$

où on a posé

$$\pi_{k,l}(x) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(k)} + \eta_{k,l}(x) \ ^{6)}$$

En effet, nous avons tout d'abord, par application de la méthode de l'hyperbole:

$$(5) \qquad \sum_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n) = \sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \pi_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) - \left[\frac{x}{\xi}\right] \pi_{k,l}(\xi)$$

Soit a tel que $1 < a < \inf(\xi, 2)$. Alors:

$$\sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \frac{1}{p} = \int_a^\xi \frac{d\pi_{k,l}(t)}{t} = \frac{\pi_{k,l}(\xi)}{\xi} + \int_a^\xi \frac{\pi_{k,l}(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{\mathrm{li}(\xi)}{\xi} + \frac{\eta_{k,l}(\xi)}{\xi} + \int_a^\xi \frac{\mathrm{li}(t)\, dt}{\varphi(k)\, t^2} + \int_a^\xi \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2} dt .$$

---

6) Pour $x > 1$, $\mathrm{li}(x) = v.\,p. \int_0^x \frac{dt}{\log t}$. Alors $\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(1)$, lorsque $x \to +\infty$.

Mais

$$\int_a^\xi \frac{\operatorname{li}(t)\,dt}{t^2} = \frac{\operatorname{li}(a)}{a} - \frac{\operatorname{li}(\xi)}{\xi} + \int_a^\xi \frac{dt}{t\log t} = \frac{\operatorname{li}(a)}{a} - \frac{\operatorname{li}(\xi)}{\xi} +$$

$$+ \log\log\xi - \log\log a\,.$$

D'où:

$$\sum_{\substack{p\leq\xi \\ p\equiv l\ (mod\ k)}} \frac{1}{p} = \frac{\log\log\xi}{\varphi(k)} + B_{k,l} + \frac{\eta_{k,l}(\xi)}{\xi} - \int_\xi^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2}\,dt\,, \tag{6}$$

avec

$$B_{k,l} = \int_a^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2}\,dt + \frac{1}{\varphi(k)}\cdot\frac{\operatorname{li}(a)}{a} - \frac{\log\log a}{\varphi(k)}\,. \tag{7}$$

Des relations (6) et (7) on déduit que $B_{k,l}$ ne dépend pas de a, mais seulement de k et l. D'autre part:

$$\sum_{1\leq j\leq \frac{x}{\xi}} \pi_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{1\leq j\leq \frac{x}{\xi}} \operatorname{li}\left(\frac{x}{j}\right) + \sum_{1\leq j\leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right).$$

Mais

$$\sum_{1\leq j\leq \frac{x}{\xi}} \operatorname{li}\left(\frac{x}{j}\right) = \int_1^{\frac{x}{\xi}} \operatorname{li}\left(\frac{x}{t}\right) d[t] = \left[\frac{x}{\xi}\right]\operatorname{li}(\xi) + x\int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{[t]}{t^2(\log x - \log t)}\,dt =$$

$$= \left[\frac{x}{\xi}\right]\operatorname{li}(\xi) + x(\log\log x - \log\log\xi) - x\int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{\{t\}}{t^2(\log x - \log t)}\,dt\,.$$

D'où:

$$\sum_{1\leq j\leq \frac{x}{\xi}} \pi_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) = \frac{1}{\varphi(k)}\left[\frac{x}{\xi}\right]\operatorname{li}(\xi) + \frac{x}{\varphi(k)}(\log\log x - \log\log\xi) - \tag{8}$$

$$- \frac{x}{\varphi(k)}\int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{\{t\}}{t^2(\log x - \log t)}\,dt + \sum_{1\leq j\leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right)$$

La relation (4) s'obtient alors en portant (6) et (8) dans le second membre de (5), et après avoir tenu compte de:

$$\sum_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \left\{\frac{x}{p}\right\}.$$

b) *Le théorème 2 implique le théorème 1.* En effet, pour $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{x}$, nous avons

$$0 \leqslant \frac{\log t}{\log x} \leqq \frac{1}{2},$$

de sorte que

$$x \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2 (\log x - \log t)}\, dt = \frac{x}{\log x} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2} \left(1 - \frac{\log t}{\log x}\right)^{-1} dt =$$

$$= \frac{x}{\log x} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2} \left(\sum_{r=0}^{+\infty} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r\right) dt = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{x}{(\log x)^{r+1}}\, C_r -$$

$$- \frac{x}{\log x} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r dt + \frac{x}{\log x} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\{t\}}{t^2} \sum_{r \geqq m} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r dt =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} C_r \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right],$$

puisqu'il existe une constante D_m (ne dépendant que de m) telle que, pour $0 \leqq r \leqq m - 1$ on ait:

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} (\log t)^r\, dt \leqslant D_m \frac{(\log x)^r}{\sqrt{x}}$$

et que d'autre part

$$\sum_{r \geqq m} \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^r \leqslant 2 \left(\frac{\log t}{\log x}\right)^m.$$

Comme, pour tout $r \geqq 1$, nous avons:

$$\frac{\sqrt{x}}{\log x} = o\left(\frac{x}{(\log x)^r}\right), \quad \text{et} \quad x\, exp\left(-C' (\log x)^{\alpha} (\log\log x)^{\beta}\right) = o\left(\frac{x}{(\log x)^r}\right),$$

il en résulte bien que le théorème 2 implique le théorème 1.

c) *Démonstration du théorème 2.* Soit $\xi = \xi(x)$ tel que $\lim_{x \to +\infty} \xi = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\xi} = +\infty$. Nous avons:

$$\int_{\xi}^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2}\, dt = O\left[\int_{\xi}^{+\infty} \frac{1}{t} \exp\left(-C(\log t)^{\alpha}(\log\log t)^{\beta}\right) dt\right] =$$

$$= O\left[\exp\left(-C(\log \xi)^{\alpha}(\log\log \xi)^{\beta}\right)(\log \xi)^{1-\alpha}(\log\log \xi)^{-\beta}\right]$$

et

$$\sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) = O\left[\sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \frac{x}{j} \exp\left(-C\left(\log \frac{x}{j}\right)^{\alpha}\left(\log\log \frac{x}{j}\right)^{\beta}\right)\right] =$$

$$= \begin{cases} O\left[\exp\left(-C(\log \xi)^{\alpha}(\log\log \xi)^{\beta}\right)\log \frac{x}{\xi}\right] x \ si\ \beta \geqslant 0 \\ O\left[\exp\left(-C(\log x)^{\alpha}(\log\log x)^{\beta}\right)\log \frac{x}{\xi}\right] x \ si\ \beta \leqslant 0\,. \end{cases}$$

D'après la relation (4) on voit donc, en prenant $\xi = \sqrt{x}$, que le théorème 2 est valable avec toute constante C' telle que $C' < 2^{-\alpha} C$.

d) *Démonstration du théorème 3.* Moyennant l'hypothèse (H_k) nous avons: $\eta_{k,l}(\xi) = O(\sqrt{\xi} \log \xi)$, et par suite les majorations

$$\int_{\xi}^{+\infty} \frac{\eta_{k,l}(t)}{t^2}\, dt = O\left(\int_{\xi}^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} \log t\, dt\right) = O\left(\frac{\log \xi}{\sqrt{\xi}}\right),$$

$$\text{et} \sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{\xi}} \eta_{k,l}\left(\frac{x}{j}\right) = O\left(\frac{x}{\sqrt{\xi}} \log x\right),$$

et d'autre part

$$\sum_{\substack{p \leq \xi \\ p \equiv l \ (mod\ k)}} \left\{\frac{x}{p}\right\} = O\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right), \text{ et } \left\{\frac{x}{\xi}\right\} \eta_{k,l}(\xi) = O(\sqrt{\xi} \log \xi) = O\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right).$$

Le terme-erreur est donc d'ordre minimal dès que $\frac{\xi}{\log \xi}$ et $\frac{\chi}{\sqrt{\xi}} \log x$ sont de même ordre, ce qui est réalisé dès que $\xi = x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{4}{3}}$. D'où le théorème 3.

3. De la démonstration du théorème 3 on tire facilement le résultat suivant:

Corollaire 1. Soit $\xi(x)$ une fonction réelle définie sur $[1, +\infty[$, vérifiant

$1 \leqq \xi(x) \leqq x$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\xi(x)}{x^{\frac{2}{3}} \log x^{\frac{4}{3}}} = +\infty$. Alors, si l'hypothèse (H_k) est vraie, nous avons pour $x \to +\infty$:

$$\sum_{\substack{p \leq \xi(x) \\ p \equiv l \pmod k}} \left\{\frac{x}{p}\right\} \sim \frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{\log x} \int_{\frac{x}{\xi(x)}}^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2}\, dt .$$

En particulier, lorsque $\xi(x) = o(x)$, nous avons:

$$\sum_{\substack{p \leq \xi(x) \\ p \equiv l \pmod k}} \left\{\frac{x}{p}\right\} \sim \frac{\xi(x)}{2 \log x} \cdot \frac{1}{\varphi(k)}$$

Il nous semble raisonnable de conjecturer que la relation

$$\sum_{\substack{p \leq \xi(x) \\ p \equiv l \pmod k}} \left\{\frac{x}{p}\right\} \sim \frac{\xi(x)}{2 \log x} \cdot \frac{1}{\varphi(k)}$$

reste vraie lorsque $\xi(x) = x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{4}{3}}$
[et même chaque fois que

$$\left. \frac{1}{2} < \liminf_{x\to+\infty} \frac{\log \xi(x)}{\log x} \leqslant \limsup_{x\to+\infty} \frac{\log \xi(x)}{\log x} < 1 . \right]$$

Si cette conjecture est vraie, on peut améliorer le théorème 3, en obtenant un terme-erreur qui est $o\left[x^{\frac{2}{3}} (\log x)^{\frac{1}{3}}\right]$, et même mieux.

4. *Extensions des théorèmes 1 à 3.*

a) De même que pour la somme $\sum\limits_{1 \leq n \leq x} \omega_{k,l}(n)$, la méthode de l'hyperbole permet d'obtenir des résultats analogues aux théorèmes 1 à 3 (développement asymptotique et reste intégral) pour la somme $\sum\limits_{1 \leq n \leq x} (\omega_{k,l}(n))^h$, h entier $\geqslant 2$. Signalons seulement le développement asymptotique)[7]:

THÉORÈME 4. *Soit h un entier $\geqq 1$. Il existe dans $\mathbf{R}[X]$ un polynôme P_o de degré h et de coefficient du terme du plus haut degré* $\dfrac{1}{\varphi(k)},$ *et une suite de*

7) H. Delange a récemment obtenu un tel résultat, et par une méthode différente et plus générale, pour toutes les fonctions additives à valeurs entières $\geqq 0$, et valant 1 sur l'ensemble des nombres premiers.

polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_r, \ldots$ *de degré* $h-1$ *tels que, lorsque* $x \to +\infty$, *on ait pour tout* $m \geqq 1$ *:*

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} (\omega_{k,l}(n))^h = x \sum_{r=0}^{m} \frac{P_r(\log\log x)}{(\log x)^r} + O\left[\frac{(\log\log x)^{h-1}}{(\log x)^{m+1}}\right]$$

Indiquons le principe de la démonstration, pour simplifier, dans le cas $h = 2$. Nous avons:

$$(\omega_{k,l}(n))^2 = \omega_{k,l}(n) + 2 \sum_{p_2/n} 1 , \tag{9}$$

où p_2 décrit les entiers décomposables en produit de deux facteurs premiers distincts et $\equiv l \pmod{k}$. Comme on connaît le développement asymptotique [8]) de $\sum_{p_2 \leqq x} 1$, la démonstration s'achève par la méthode de l'hyperbole, grâce à la relation (9), de manière analogue au théorème 1.

b) Il est clair que les théorèmes asymptotiques 1 à 4 s'étendent à une large classe de fonctions fortement additives[9]): c'est le cas pour toutes les fonctions totalement additives $f(n)$ pour lesquelles il existe une fonction réelle $\theta(x)$ « suffisamment dérivable » (par exemple de classe C^1) et « suffisamment régulière » (par exemple $\theta(x) = x^\lambda$, $\lambda > 0$; $\theta(x) = (\log x)^\lambda$, $\lambda > 0$) telle que $f(p) = \theta(p)\, \chi_{k,l}(p)$, où $\chi_{k,l}$ est la fonction caractéristique des nombres premiers $\equiv l \pmod{k}$. On peut alors calculer les développements de $\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} (f(n))^h$, h entier $\geqq 1$.

Par exemple, si $S_\lambda(n)$ est la somme des puissances λièmes des diviseurs premiers de n $(\lambda > 0)$, nous pouvons trouver une suite de constantes α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ ne dépendant que de λ et telles que, lorsque $x \to +\infty$, on ait pour tout entier $m \geqq 2$:

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} S_\lambda(n) = \frac{\zeta(\lambda+1)}{\lambda+1} \cdot \frac{x^{\lambda+1}}{\log x} + \sum_{r=2}^{m} \alpha_r \frac{x^{\lambda+1}}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x^{\lambda+1}}{(\log x)^{m+1}}\right].$$

III. Sur un théorème de Rényi et Delange

1. Soient $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers distincts de l'entier positif n, et $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers. Autrement dit, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, où les p_i sont

8) Cf. [11].

9) Une fonction arithmétique additive est dite fortement additive si $f(p^m) = f(p)$ pour tous p premier et m entier $\geqq 1$.

des nombres premiers distincts deux à deux et les α_i des entiers $\geqslant 1$, alors $\omega(n) = r$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r$. On a donc $\Omega(n) \geqslant \omega(n)$, l'égalité n'ayant lieu que pour les entiers « quadratfrei ».

A. Rényi [5] a montré que, pour tout entier $m \geqq 0$, l'ensemble des entiers n pour lesquels $\Omega(n) - \omega(n) = m$ possède une densité d_m (c.à.d. que, si $v_m(x)$ est le nombre des $n \leqq x$ tels que $\Omega(n) - \omega(n) = m$, alors pour $x \to +\infty$ on a:

$$v_m(x) = d_m x + o(x)$$

H. Delange [6] a précisé ce résultat de la façon suivante:

THÉORÈME A. *Le fait que la fonction $\xi(s)$ de Riemann n'a aucun zéro de partie réelle égale à 1 implique que, lorsque $x \to +\infty$:*

$$v_m(x) = d_m x + o\left[\sqrt{x}\,(\log\log x)^m\right]$$

Dans un second article, H. Delange [7] a amélioré le résultat précédent de la façon suivante:

THÉORÈME B. *Le fait que la fonction $\mu(n)$ de Möbius satisfait à :*

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} \mu(n) = O\left[x\, e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right] \qquad (\alpha > 0)$$

implique que, lorsque $x \to +\infty$:

$$v_m(x) = d_m x + O\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}(\log\log x)^{m-1}}{\log x}\right],$$

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'améliorer ce dernier résultat de Delange, en donnant un développement asymptotique de la différence $v_m(x) - d_m x$, et même mieux: nous nous sommes en effet aperçu que, grâce à une astuce simple, on peut transformer l'expression de $v_m(x)$ de façon à le rendre calculable par la méthode de l'hyperbole. Nous montrerons également, en appendice, comment notre méthode permet de retrouver de façon simple le résultat de Rényi et le théorème A de Delange.

2. *Etude du cas $m = 1$.*

En raison de la grande difficulté technique, nous traitons d'abord le cas $m = 1$, pour traiter ensuite le cas $m \geqq 2$ de façon plus sommaire [10]).

10) Le cas $m = 0$ est le cas bien connu des « quadratfrei ». Alors $d_0 = \frac{6}{\pi^2}$, et $v_0(x) = Q(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O\,[\sqrt{x}\exp(-C(\log x)^\alpha(\log\log x)^\beta]$, où $C > 0$ et $\alpha > 0$. L'hypothèse de Riemann donne un reste bien meilleur: $O\left[x^{\frac{2}{5}+\varepsilon}\right]$, pour tout $\varepsilon > 0$.

THÉORÈME 5. *Pour tout entier $k \geqq 2$ nous avons, lorsque $x \to +\infty$:*

$$v_1(x) = d_1 x + \sum_{j=2}^{k} A_j \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^j} + O\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^{k+1}}\right],$$

où la suite des constantes $A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots$ est définie par :

$$A_j = (-1)^{j-1} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left(\frac{\zeta(s)}{s\zeta(2s)}\right)_{s=\frac{1}{2}}$$

Le théorème 5 est une conséquence du résultat plus précis suivant:

THÉORÈME 6. *Soit $\pi(t)$ le nombre de nombres premiers $\leqq t$, et soient C, α, β trois constantes ($C>0, \alpha>0$) telles que, lorsque $t \to +\infty$, on ait :*

$$\pi(t) = \mathrm{li}(t) + O\left[t \exp\left(-C(\log t)^{\alpha}(\log\log t)^{\beta}\right)\right].$$

Soit $Q(t)$ le nombre d'entiers « quadratfrei » $\leqq t$, et soit $R(t) = Q(t) - \frac{6}{\pi^2} t$. Alors, lorsque $x \to +\infty$, nous avons :

$$v_1(x) = d_1 x - \frac{6}{\pi^2} x \int_x^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\log t} dt + x^{\frac{1}{2}} \int_1^{\exp[C'(\log x)^{\alpha}]} \frac{t^{-\frac{2}{3}} R(t)}{\log x - \log t} dt +$$

$$+ O\left[x^{\frac{1}{2}} \exp\left(-C'(\log x)^{\alpha'}(\log\log x)^{\beta'}\right)\right],$$

où C', α', β' sont des constantes, avec $C' > 0$ et $\alpha' > 0$ [on peut prendre $\alpha' = \alpha^2$ *et* $\beta' = 2\alpha\beta$]

En admettant l'hypothèse de Riemann, on peut considérablement améliorer le terme-erreur du théorème 6, le remplaçant par $O\left[x^{\frac{8}{17}+\varepsilon}\right]$, grâce au:

THÉORÈME 7. *Moyennant l'hypothèse de Riemann, nous avons pour $x \to +\infty$:*

$$v_1(x) = d_1 x - \frac{6}{\pi^2} x \int_x^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{5}{3}}}{\log t} dt + x^{\frac{1}{2}} \int_1^{x^{\frac{5}{17}}} \frac{t^{-\frac{3}{2}} R(t)}{\log x - \log t} dt -$$

$$- x^{\frac{1}{3}} \int_{1}^{x^{\frac{5}{17}}} \frac{t^{-\frac{4}{3}} R(t)}{\log x - \log t} \, dt + O \left[x^{\frac{8}{17}} \exp \left(K \frac{\log x}{\log\log x} \right) \right],$$

où K est une constante absolue > 0.

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 5 A 7.

a) *Calcul préparatoire.* Dans toute la suite, la lettre q désignera exclusivement les entiers « quadratfrei ». Les entiers n tels que $\Omega(n) - \omega(n) = 1$ sont ceux dont la décomposition en facteurs premiers comporte un seul exposant égal à 2, tous les autres exposants étant égaux à 1. Autrement dit, nous avons $\Omega(n) - \omega(n) = 1$ si et seulement si $n = p^2 q$, avec $p \nmid q$. Par suite:

$$v_1(x) = \sum_{\substack{p^2 q \leq x \\ p \nmid q}} 1 = \sum_{p^2 q \leq x} 1 - \sum_{\substack{p^2 q \leq x \\ p \mid q}} 1 = \sum_{p^2 q \leq x} 1 - \sum_{\substack{p^3 q \leq x \\ p \nmid q}} 1 =$$

$$= \sum_{p^2 q \leq x} 1 - \sum_{p^3 q \leq x} 1 + \sum_{\substack{p^3 q \leq x \\ p \mid q}} 1 = \sum_{p^2 q \leq x} 1 - \sum_{p^3 q \leq x} 1 + \sum_{\substack{p^4 q \leq x \\ p \nmid q}} 1 = \ldots =$$

$$= \sum_{r \geq 2} (-1)^r \sum_{p^r q \leq x} 1 .$$

Il est clair que la dernière expression obtenue est une somme finie, car nous avons $\sum_{p^r q \leq x} 1 = 0$ dès que $r > \dfrac{\log x}{\log 2}$. En définitive nous avons:

$$(10) \qquad v_1(x) = \sum_{r \geq 2} (-1)^r \, V_r(x), \qquad \text{avec } V_r(x) = \sum_{\substack{p, q \\ p^r q \leq x}} 1 .$$

b) *Démonstration des théorèmes 6 et 7.* Puisque $V_r(x)$ est la fonction sommatoire du produit de convolution de la fonction caractéristique de l'ensemble des « quadratfrei » par la fonction caractéristique des puissances $r^{\text{ièmes}}$ des nombres premiers, nous pouvons calculer $V_r(x)$ par la méthode de l'hyperbole. Cependant dans le cas présent, et pour des raisons de commodité dans la rédaction, nous procéderons d'une manière légèrement différente. D'après la relation (10), $v_1(x)$ est la fonction sommatoire du produit de convolution de la fonction caractéristique de l'ensemble des « quadratfrei » par la fonction arithmétique valant $(-1)^r$ si $n = p^r$ (où $r \geq 2$), et zéro si n n'est pas de cette forme. Posant:

$$\pi^*(x) = \sum_{\substack{p^r \leqq x \\ r \geqq 2}} (-1)^r = \mathrm{li}(\sqrt{x}) + \eta^*(x),$$

nous obtenons par application de la méthode de l'hyperbole, avec $1 < \xi < x$:

$$(11) \qquad \nu_1(x) = \sum_{\substack{p^r \leqq \xi \\ r \geqq 2}} Q\left(\frac{x}{p^r}\right)(-1)^r + \sum_{q \leqq \frac{x}{\xi}} \pi^*\left(\frac{x}{q}\right) - \pi^*(\xi)\, Q\left(\frac{x}{\xi}\right)$$

Nous avons d'abord:

$$\sum_{\substack{p^r \leqq \xi \\ r \geqq 2}} Q\left(\frac{x}{p^r}\right)(-1)^r = \frac{6x}{\pi^2} \sum_{\substack{p^r \leqq \xi \\ r \geqq 2}} (-1)^r p^r + \sum_{\substack{p^r \leqq \xi \\ r \geqq 2}} R\left(\frac{x}{p^r}\right)(-1)^r =$$

$$= \frac{6x}{\pi^2} \sum_p \frac{1}{p(p+1)} - \frac{6x}{\pi^2} \int_\xi^{+\infty} \frac{d\pi^*(t)}{t} + \sum_{\substack{p^r \leqq \xi \\ r \geqq 2}} (-1)^r R\left(\frac{x}{p^r}\right).$$

En effectuant, de la même manière que dans les démonstrations des théorèmes 1 à 3, deux intégrations par parties successives sur l'intégrale $\int_\xi^{+\infty} t^{-1}\, d\pi^*(t)$, nous obtenons:

$$(12) \qquad \sum_{\substack{p^r \leqq \xi \\ r \geqq 2}} Q\left(\frac{x}{p^r}\right)(-1)^r = \frac{6x}{\pi^2} \sum_p \frac{1}{p(p+1)} + \sum_{\substack{p^r \leqq \xi \\ r \geqq 2}} (-1)^r R\left(\frac{x}{p^r}\right) -$$

$$- \frac{6x}{\pi^2} \int_\xi^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\log t}\, dt + \frac{6x}{\pi^2} \frac{\eta^*(\xi)}{\xi} - \frac{6x}{\pi^2} \int_\xi^{+\infty} \frac{\eta^*(t)}{t^2}\, dt$$

De la même manière nous obtenons, avec a quelconque tel que $0 < a < 1$:

$$(13) \qquad \sum_{q \leqslant \frac{x}{\xi}} \pi^*\left(\frac{x}{q}\right) = \sum_{q \leqslant \frac{x}{\xi}} \eta^*\left(\frac{x}{q}\right) + \int_a^{\frac{x}{\xi}} \mathrm{li}\left(\sqrt{\frac{x}{t}}\right) dQ(t) = \frac{6x}{\pi^2} \cdot \frac{\mathrm{li}(\sqrt{\xi})}{\xi} +$$

$$+ \mathrm{li}(\sqrt{\xi})\, R\left(\frac{x}{\xi}\right) + \sum_{q \leqslant \frac{x}{\xi}} \eta^*\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{6x}{\pi^2} \int_\xi^{\frac{x}{a}} \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\log t}\, dt + \sqrt{x} \int_a^{\frac{x}{\xi}} \frac{t^{-\frac{3}{2}} R(t)}{\log x - \log t}\, dt$$

Il résulte de la relation (13) que la somme des deux derniers termes du dernier membre de (13) ne dépend pas de a $(0<a<1)$: par conséquent la relation (13) reste vraie avec $a = 1$.

Enfin, il est clair que:

$$(14) \qquad -\pi^*(\xi)\, Q\left(\frac{x}{\xi}\right) = -\frac{6x}{\pi^2}\cdot\frac{\operatorname{li}(\sqrt{\xi})}{\xi} - \frac{6x}{\pi^2}\frac{\eta^*(\xi)}{\xi} - $$
$$- R\left(\frac{x}{\xi}\right)\operatorname{li}(\sqrt{\xi}) - R\left(\frac{x}{\xi}\right)\eta^*(\xi).$$

D'après (11), nous obtenons par addition des relations (12), (13) [avec $a = 1$] et (14):

$$(15) \quad v_1(x) = \frac{6x}{\pi^2}\sum_{\rho}\frac{1}{p(p+1)} - \frac{6x}{\pi^2}\int_x^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\log t}\,dt + \sqrt{x}\int_1^{\frac{x}{\xi}}\frac{t^{-\frac{3}{2}}R(t)}{\log x - \log t}\,dt -$$
$$-\frac{6x}{\pi^2}\int_{\xi}^{+\infty}\frac{\eta^*(t)}{t^2}\,dt + \sum_{\substack{\rho^r \leqslant \xi \\ r \geqslant 2}}(-1)^r R\left(\frac{x}{\rho^r}\right) + \sum_{q \leqslant \frac{x}{\xi}}\eta^*\left(\frac{x}{q}\right) - R\left(\frac{x}{\xi}\right)\eta^*(\xi).$$

De la même manière que nous avons obtenu le théorème 2 à partir de la relation (4), nous obtenons le théorème 6 à partir de la relation (15) en prenant, avec une constante convenable $C' > 0$:

$$\xi = x \exp\left[-C'(\log x)^{\alpha}\right],$$

et en remarquant que la formule:

$$\pi(t) = \operatorname{li}(t) + O\left[t \exp\left(-C(\log t)^{\alpha}(\log\log t)^{\beta}\right)\right]$$

a pour conséquence les relations:

$$\eta^*(t) = O\left[\sqrt{t}\exp\left(-C''(\log t)^{\alpha}(\log\log t)^{\beta}\right)\right]$$

et

$$R(t) = O\left[\sqrt{t}\exp\left(-C'''(\log t)^{\alpha}(\log\log t)^{\beta}\right)\right]$$

où C'' et C''' sont des constantes convenables > 0.

L'hypothèse de Riemann, qui est équivalente à la relation $\eta^*(t) = \operatorname{li}(\sqrt[3]{t}) + O(t^{\frac{1}{4}}\log t)$ implique en outre [11]):

$$R(t) = O\left[t^{\frac{2}{5}}\exp\left(K'\frac{\log x}{\log\log x}\right)\right]; \; K' \text{ constante} > 0.$$

11) Cf. [16].

Dans ce cas, un calcul élémentaire fait d'après la relation (15) montre que le meilleur choix de ξ est $\xi = x^{\frac{12}{17}}$, et le théorème 7 découle alors des relations (10) et (15) et des estimations de $\eta(t)$ et de $R(t)$.

c) *Démonstration du théorème 5.* Le théorème 5 s'obtient à partir du théorème 6 de la même manière que nous avons obtenu le théorème 1 à partir du théorème 2. En effet, on peut développer suivant les puissances de $\frac{1}{\log x}$ les deuxième et troisième termes du second membre de la relation donnant $v_1(x)$ [dans l'énoncé du théorème 6], et nous obtenons immédiatement, pour tout $k \geqq 1$:

$$v_1(x) = d_1 x + \sum_{j=1}^{k} A_j \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^j} + O\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^{k+1}}\right],$$

avec:

$$A_j = \frac{6}{\pi^2}(j-1)!(-1)^j 2^j + \int_1^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} (\log t)^{j-1} R(t)\, dt\,. \tag{16}$$

Nous pouvons dès à présent remarquer que $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$. En effet nous avons (cf. [7]):

$$\int_0^x \left(v_m(t) - d_m t\right) dt \sim -\frac{8}{3}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}(\log\log x)^{m-1}}{(\log x)^2}$$

Il en résulte ici:

$$A_1 = 0 \text{ et } A_2 = -4\zeta\left(\frac{1}{2}\right).$$

Nous allons donner, pour les A_j, une expression plus simple [12]) que celle de la relation (16):

Pour s complexe, $\mathcal{R}e(s) > 1$, nous avons:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dQ(t)}{t^s} = s\int_1^{+\infty} \frac{Q(t)}{t^{s+1}}\, dt$$

12) En août 1968, nous avions démontré le développement asymptotique [les A_j étant donnés par la relation (16)] et fait le calcul effectif de A_1 et de A_2. M. H. Delange a bien voulu nous indiquer que les A_j donnés par la relation (16) prenaient en fait la forme plus simple de la relation (17).

donc, pour $\mathcal{R}e\,(s) > 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{R\,(t)}{t^{s+1}}\,dt = \frac{\zeta\,(s)}{s\,\zeta\,(2s)} - \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{s-1}$$

L'intégrale étant absolument convergente pour $\mathcal{R}e\,(s) \geqq \frac{1}{2}$, l'égalité ci-dessus a lieu pour $\mathcal{R}e\,(s) \geqq \frac{1}{2}$. On voit ainsi que:

$$\int_1^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}}\,(\log t)^r\,R\,(t)\,dt = (-1)^r\,F^{(r)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

avec

$$F\,(s) = \frac{\zeta\,(s)}{s\,\zeta\,(2s)} - \frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{s-1}$$

En définitive:

$$(17) \qquad A_j = (-1)^{j-1}\,\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left(\frac{\zeta\,(s)}{s\,\zeta\,(2s)}\right)_{s\,=\,\frac{1}{2}}$$

Ainsi

$$A_1 = 2\,\frac{\zeta\,(\frac{1}{2})}{\zeta\,(1)} = 0\,,\ \text{et}\ A_2 = -\lim_{s\,\to\,\frac{1}{2}} \frac{\zeta\,(s)}{(s-\frac{1}{2})\,s\,\zeta\,(2s)} = -\,4\,\zeta\,(\tfrac{1}{2})$$

3. *Etude du cas $m \geqq 2$.*

Au prix de difficultés techniques énormes, notre méthode permet de trouver, pour la différence $v_m\,(x) - d_m\,x$, un développement asymptotique (analogue au théorème 5), ainsi que des formes plus précises (analogues aux théorèmes 6 et 7). Signalons seulement le développement asymptotique [13]):

THÉORÈME 8. *Il existe dans* $\mathbf{R}\,[X]$ *une suite de polynômes* $P_2, P_3, \ldots, P_k, \ldots$ *de degré* $m-1$, *tels que, pour tout entier* $k \geqq 2$ *on ait lorsque* $x \to +\infty$ *:*

$$v_m\,(x) = d_m\,x + \sum_{j\,=\,2}^{k} \frac{P_j\,(\log\log x)}{(\log x)^j} + O\left[\frac{(\log\log x)^{m-1}}{(\log x)^{k+1}}\right]$$

13) Pour plus de détails sur ce développement asymptotique, cf. [10].

Indiquons le principe de la démonstration: il s'agit d'établir, dans le cas général $m \geqq 1$, des résultats analogues à la relation (10). Posons, pour tous entiers $r_1 \geqq 2$, $r_2 \geqq 1$:

$$Vr_{1,}r_2(x) = \sum_{\substack{p^{r_1}\, p'^{r_2}\, q \leqq x \\ p \neq p'}} 1 .$$

Posons de même, pour tous entiers $r_1 \geqq 2$, $r_2 \geqq 2$, $r_3 \geqq 2$:

$$Vr_{1,}r_{2,}r_3(x) = \sum_{\substack{p^{r_1}\, p'^{r_2}\, p''^{r_3}\, q \leqq x \\ p \neq p' \neq p'' \neq p}} 1$$

Les seuls entiers n tels que $\Omega(n) - \omega(n) = 2$ sont ceux de la forme $n = $ $= p^3 q$, $p \nmid q$, ou bien $n = p^2 p'^2 q$, $p \neq p'$, $p \nmid q$, $p' \nmid q$.
Les seuls entiers n tels que $\Omega(n) - \omega(n) = 3$ sont ceux de la forme $n = $ $= p^4 q$, $p \nmid q$, ou bien $n = p^3 p'^2 q$, $p \neq p'$, $p \nmid q$, $p' \nmid q$, ou bien $n = $ $= p^2 p'^2 p''^2 q$, $p \neq p' \neq p'' \neq p$, $p \nmid q$, $p' \nmid q$, $p'' \nmid q$.

On obtient alors, par la même méthode qui a servi à démontrer la relation (10):

$$v_2(x) = \sum_{r \geqq 3} (-1)^{r+1} V_r(x) + \sum_{r1 \geqq 2,\, r2 \geqq 2} (-1)^{r_1 + r_2} V_{r1,r2}(x),$$

$$v_3(x) = \sum_{r \geqq 4} (-1)^{r} V_r(x) + \sum_{r1 \geqq 3,\, r2 \geqq 2} (-1)^{r_1 + r_2 + 1} V_{r1,r2}(x) +$$

$$+ \sum_{1r \geqq 2,\, r2 \geqq 2,\, r3 \geqq 2} (-1)^{r1 + r2 + r3} V_{r1,r2,r3}(x),$$

et des formules analogues dans le cas $m \geqq 4$.

Puisqu'on connaît la répartition asymptotique des entiers dont le nombre de facteurs premiers est donné (cf. [11]), il en résulte que chacune des quantités $V_r(x)$, $V_{r1,r2}(x)$, $V_{r1,r2,r3}(x)$ est calculable par la méthode de l'hyperbole, et le calcul se poursuit exactement comme dans la démonstration des théorèmes 5 à 7.

4. *Remarques.*

a) Notre méthode s'applique à des fonctions arithmétiques plus générales que $\Omega(n) - \omega(n)$: soit $f(n)$ une fonction arithmétique additive et « prime-independant », c'est-à-dire que si p et p' sont premiers et α est entier $\geqq 0$, alors $f(p^\alpha) = f(p'^\alpha)$. Supposons de plus que la fonction $f(p^\alpha)$ [de la variable α] soit non-décroissante, à valeurs entières $\geqq 0$, et s'annule pour $\alpha = 1$. Alors nous pourrons donner, pour le nombre $v_m(x)$ des entiers $n \leqq x$ tels que $f(n) = m$ un développement asymptotique analogue à celui du théorème 8, la différence $v_r(x) - d_r x$ étant ainsi équivalente au produit d'une constante par $x^{\frac{1}{r+1}} (\log x)^{-2}$, où r est le plus grand entier α tel que $f(p^\alpha) = 0$.

b) La démonstration du développement asymptotique mentionné cidessus, et a fortiori ceux des théorèmes 5 et 8 (et, pareillement, ceux des théorèmes 1 et 4), peut se faire en n'utilisant le théorème des nombres premiers que sous sa forme asymptotique, c'est-à-dire:

$$\pi(x) = \sum_{r=1}^{k} (r-1)! \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{k+1}}\right].$$

IV. Méthode analytique

La méthode de l'hyperbole, parce qu'elle est élémentaire, a une efficacité limitée (la rédaction complète de la démonstration du théorème 8, faisable pour $m = 2$, devient horrible pour $m \geqq 3$).

H. Delange, par des méthodes analytiques, retrouve tous les résultats contenus dans cet article de façon plus rapide et plus générale, et va beaucoup plus loin. Trois articles à ce sujet [8], [9] et [10] sont à paraître en 1970 dans *Acta Arithmetica.*

Appendice

Nous montrons ici comment on peut retrouver, de façon élémentaire, le résultat de Renyi (et même un peu mieux) et le théorème A de Delange.

Théorème. *Notons toujours par* $v_m(x)$ *le nombre des* $n \leqq x$ *tels que* $\Omega(n) - \omega(n) = m$. *Alors :*

a) *Sans utiliser aucune estimation de* $\pi(x)$ [*autre que l'estimation banale* $\pi(x) = O(x)$], *nous avons :*

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} \log x).$$

b) *L'estimation de Tchebicheff* $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ *implique :*

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} (\log\log x)^m)$$

c) *Le théorème des nombres premiers* $\left[\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}\right]$ *implique :*

$$v_m(x) = d_m x + o\left(\sqrt{x}(\log\log x)^{m-1}\right).$$

Démonstration :

a) Reprenons les expressions $V_r(x)$, $V_{r_1,r_2}(x)$, $V_{r_1,r_2,r_3}(x)$, ... définies précédemment. Compte tenu de la relation $Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x})$ [dont la démonstration ne fait appel à aucune estimation de $\pi(x)$], nous avons:

$$V_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x) = \frac{6}{\pi^2} x \sum_p p^{-(r_1+r_2+\ldots+r_k)} + O\left(x \sum_{l>\sqrt{x}} l^{-2}\right) + O\left(\sqrt{x} \sum_{l \leq \sqrt{x}} \frac{1}{l}\right)$$

$= \text{constante } x + O(\sqrt{x}\log x)$.

En utilisant alors la relation (10) et ses analogues [rencontrés au cours de la démonstration du théorème 8], on obtient par addition

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x}\log x).$$

b) L'estimation de Tchebicheff $\pi(x) = O\left(\dfrac{x}{\log x}\right)$ implique:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant x \\ \omega(l) \leqslant k}} 1 = O\left(\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{k-1}\right)$$

Nous obtenons donc cette fois:

$$V_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x) = \text{constante } x + O\Big[x \sum_{\substack{l>\sqrt{x} \\ \omega(l) \leqq k}} l^{-2}\Big[+ O\Big[\sqrt{x} \sum_{\substack{l \leqq \sqrt{x} \\ \omega(l) \leqq k}} \frac{1}{l}\Big] =$$

$$= \text{constante } x + O\left[\sqrt{x}(\log\log x)^k\right]$$

En utilisant alors la relation (10) et ses analogues, on obtient donc:

$$v_m(x) = d_m x + O\left(\sqrt{x}(\log\log x)^m\right).$$

c) Le théorème des nombres premiers $\left[\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}\right]$ implique:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant x \\ \omega(l) \leqslant k}} 1 \sim \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant x \\ \Omega(l) = k}} 1 \sim \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x}{\log x}(\log\log x)^{k-1}.$$

La relation $v_m(x) = d_m x + o\left(\sqrt{x}(\log\log x)^m\right.$ (s'obtient alors de façon analogue à b), en remarquant que cette fois: $Q(x) = \frac{6\,x}{\pi^2} + o(\sqrt{x})$.

RÉFÉRENCES

[1] DIRICHLET, *Werke*, II, pp. 49-66.
[2] TSUNG-TAO-CHIH, *The Dirichlet's divisor problem*, The Science Report of Tsing Hua University 5 (1950), pp. 402-427.
[3] YIN-WEN-LIN, *On Dirichlet's divisor problem*, Science Report (N.S.) 3 (1959), pp. 6-8.
[4] RAMANUJAN, *Collected papers*, Chelsea, Edition 1962, p. 263 et p. 347.
[5] RENYI, A., *On the density of certain sequences of integers*, publications de l'Institut de Mathématiques de l'Académie Serbe des Sciences 8 (1955), pp. 157-162.
[6] DELANGE, H., Sur un théorème de Rényi, *Acta Arithmetica 11* (1965), pp. 241-252.
[7] —— Sur un théorème de Rényi II, *Acta Arithmetica 13* (1968), pp. 339-362.
[8] —— Sur certaines fonctions additives à valeurs entières, *Acta Arithmetica* (1970) [à paraître].
[9] —— sur des formules de ATLE SELBERG, *Acta Arithmetica* (1970) [á paraître].
[10] —— Sur un théorème de Rényi, III, *Acta Arithmetica* (1970) [à paraître].
[11] LANDAU, E., *Nachr. Ges, Wiss, Göttinhen* (1911), pp, 361-381,
[12] RADEMACHER, H., Lectures on elementary Number theory, Blaisdell, 1964, p. 100,
[13] HARDY, G. H. et E. M. WRIGHT, *Introduction to the theory of numbers*, Oxford. chap. XVIII.
[14] LANDAU, E., *Vorlesungen uber Zahlentheorie*, Zweiter Band, p. 46.
[15] WALFISZ, A. Z., *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, chap. V (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963).
[16] AXER, Sitzungsber. Akad. Wien (2a) vol. 120 (1911), pp. 1253-1298.

(Manuscrit reçu le 30 avril 1969)

Bahman Saffari
1, place Corneille
92 Boulogne
FRANCE