

2. Proof of Theorem 1

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SIMPLE PROOFS OF TWO THEOREMS ON MINIMAL SURFACES

Shiing-shen CHERN *)

To the memory of J. Karamata

1. INTRODUCTION

We will give simple proofs of the following uniqueness theorems on minimal surfaces:

THEOREM 1 (Bernstein). *Let $z = f(x, y)$ be a minimal surface in euclidean three-space defined for all x, y . Then $f(x, y)$ is a linear function.*

THEOREM 2. *A closed minimal surface of genus zero on the three-sphere must be totally geodesic and is hence a great sphere.*

Theorem 2 has been proved by Almgren [1] and Calabi [2].

2. PROOF OF THEOREM 1

Let

$$(1) \quad W = \left(1 + f_x^2 + f_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq 1.$$

The proof is based on the identity

$$(2) \quad \Delta \log \left(1 + \frac{1}{W} \right) = K,$$

where Δ is the Laplacian relative to the induced riemannian metric of the minimal surface M and K is its Gaussian curvature.

Suppose (2) be true. Let ds be the element of arc on M . Introduce the conformal metric

*) Work done under partial support of NSF grant GP 8623.

$$(3) \quad d\sigma = \left(1 + \frac{1}{W}\right) ds.$$

If p, q are isothermal coordinates on M , so that

$$(4) \quad ds^2 = \lambda^2 (dp^2 + dq^2),$$

we have

$$(5) \quad K = -\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) \log \lambda,$$

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right).$$

Applying this to the metric $d\sigma$, we find immediately that its gaussian curvature is zero, or that the metric is flat.

On the other hand, it is clear that

$$(6) \quad ds \leq d\sigma \leq 2 ds.$$

It follows that the metric $d\sigma$ on M is complete, for it dominates ds and ds is complete. We have therefore on M a complete flat riemannian metric $d\sigma$. By a well-known theorem, M , with the metric $d\sigma$, is isometric to the (ξ, η) -plane with its standard flat metric, i.e.,

$$(7) \quad d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

Since $K \leq 0$, we have, from (2) and (5),

$$(8) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{W} \right) \leq 0.$$

The function $\log \left(1 + \frac{1}{W} \right)$, considered as a function in the (ξ, η) -plane, is therefore superharmonic. It is also clearly non-negative. By a well-known theorem on superharmonic functions ([3], p. 130) it must be a constant. Equation (2) then gives $K = 0$, which implies that M is a plane.

The proof of (2) is a standard calculation. It will be proved at the end of § 4 as a special case of a more general formula.

An advantage of this proof is the fact that, unlike many other known proofs, complex function theory is not used.