théorème de Bochner-Weil pour un groupe discret

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

$(C \dot{-} X)$ soit convexe. Tout élément extrémal $x \neq 0$ de X appartient à une génératrice extrémale de C.

c) Si C est un cône convexe saillant, métrisable et faiblement complet, tout point x de C appartient à un chapeau de C, et pour tout borélien B de C qui rencontre toute génératrice extrémale de C hors de 0, x est résultante d'une mesure positive portée par B. D'autre part si, pour tout x cette mesure est unique, C est réticulé, et l'application qui à tout $x \in B$ associe la génératrice qui le porte est une bijection de B sur l'ensemble des génératrices extrémales de C.

Le théorème de Bochner-Weil pour un groupe discret

Pour mieux éclairer le mécanisme de la démonstration générale, nous la ferons d'abord pour les groupes discrets.

Soit donc G un groupe abélien quelconque, et soit f une fonction à valeurs complexes sui G.

On dit que f est de *type positif* (ou définie positive) si pour toute famille finie $(x_i)_{i \in I}$ de points de G, et toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de nombres complexes, $\sum\limits_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j f(x_i - x_j)$ est un nombre réel positif.

Il est commode d'exprimer tout de suite cette propriété en teimes de convolution, en utilisant les mesures discrètes $\mu = \Sigma \alpha_i \varepsilon_{x_i}$ et $\tilde{\mu} = \Sigma \bar{\alpha}_i \varepsilon_{-x_i}$. La condition précédente devient alors:

$$(1) \qquad \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j f(x_i - x_j) = (\mu * \tilde{\mu})(f) \geqq 0, \text{ ou encore } (\mu * \tilde{\mu} * f)(0) \geqq 0 .$$

En particulier, si on prend $\mu = \varepsilon_0 + c\varepsilon_a$, cette condition devient:

$$(2) \qquad (1 + |c|^2) f(0) + cf(a) + \bar{c}f(-a) \geqq 0 .$$

Si on donne successivement à c les valeurs 0, 1, i, $-|f(a)|/f(a)$ (quand $f(a) \neq 0$), un calcul élémentaire fournit les relations importantes:

$$(3) \qquad f(0) \geqq 0; \quad f(-x) = \overline{f(x)} \quad \text{et} \quad |f(x)| \leqq f(0) .$$

Exemple. Appelons *caractère* de G toute f à valeurs complexes sur G, bornée, non identiquement nulle, et vérifiant l'identité $f(x+y) = f(x) f(y)$.

Il est immédiat que $f(0) = 1$, que $|f(x)| = 1$, et que $f(-x) = \overline{f(x)}$ pour tout $x \in G$. Il en résulte que:

$$\sum \alpha_i \bar{\alpha}_j f(x_i - x_j) = \left(\sum \alpha_i f(x_i)\right)\overline{\left(\sum \alpha_j f(x_j)\right)} \geqq 0;$$

donc tout caractère est de type positif.

Nous désignerons désormais par K l'ensemble des caractères sur G.

On notera P l'ensemble des fonctions de type positif sur G; comme P est évidemment stable par addition et multiplication par des scalaires positifs, P est un cône convexe de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(G, \mathbf{C})$ des applications de G dans $\mathbf{C}$.

L'ensemble $P_1 = \{ f \in P : f(0) = 1 \}$ est l'intersection de P avec l'hyperplan $\{ f; f(0) = 1 \}$, et comme d'après (3), $(f(0) = 0)$ entraîne $(f = 0)$, tout $f \in P$ est proportionnel à un élément de P_1. Donc P_1 est une base de P.

Nous allons déterminer ses éléments extrémaux en utilisant à nouveau les mesures $(\varepsilon_0 + c\varepsilon_a)$. Remarquons d'abord que si $f \in P$, on a aussi $g = \lambda * \tilde{\lambda} * f \in P$ pour toute mesure discrète λ; en effet, pour toute μ discrète on a:

$$\mu * \tilde{\mu} * g = (\lambda * \mu)\,\widetilde{(\lambda * \mu)} * f, \quad \text{d'où} \quad (\mu * \tilde{\mu} * g)(0) \geqq 0\,.$$

Donc, en prenant successivement $\lambda = (\varepsilon_0 + c\varepsilon_a)$ et $(\varepsilon_0 - c\varepsilon_a)$, et en posant $f_u = \varepsilon_u * f$, on obtient:

$$g = (1 + |c|^2) f + c f_a + \bar{c} f_{-a} \in P$$

$$h = (1 + |c|^2) f - c f_a - \bar{c} f_{-a} \in P\,.$$

Donc $g + h = f$, à un facteur >0 près; si donc f est extrémale dans P, g et h sont proportionnelles à f, d'où par soustraction:

$$g - h = 2(c f_a + \bar{c} f_{-a}) = \alpha f\,.$$

En faisant successivement $c = 1$ et i dans cette relation, une combinaison linéaire évidente montre que:

$$f_a = k(a) f, \qquad \text{ou encore} \qquad f(x - a) = k(a) f(x)\,.$$

Supposons f normalisée, c'est-à-dire $f \in P_1$; on a alors $k(a) = f(-a)$; autrement dit f vérifie l'identité $f(x+y) = f(x) f(y)$.

Donc *tout élément extrémal de P_1 est un caractère de G.*

Munissons maintenant $\mathscr{F}(G, \mathbf{C})$ de la topologie de la convergence simple. Pour cette topologie, P_1 et K sont compacts puisque, d'une part, tout ultrafiltre sur P_1 ou K converge vers une f bornée, et que, d'autre part, les relations qui caractérisent les éléments de P_1 ou K sont stables par passage à la limite.

D'après le rappel 1_a, et compte tenu de ce que $\mathscr{E}(P_1) \subset K$, toute $f \in P_1$ est résultante d'une mesure positive π de masse 1 sur K; donc si l'on remarque que, pour tout $x \in G$, l'application $g \to g(x)$ est linéaire et continue sur P on a, en désignant par $[x, t]$ la valeur d'un caractère t au point x:

$$f(x) = \int [x, t]\, d\pi(t)\,. \tag{4}$$

Complétons maintenant ce résultat en montrant que la mesure π associée à f est unique, ce qui entraînera d'après 1_a, que $\mathscr{E}(P_1) = \mathrm{K}$: il suffit pour cela d'observer que sur K, l'ensemble des fonctions continues $\hat{a} : t \to [a, t]$ est stable par multiplication et par passage au conjugué, contient la constante 1, et sépare les points de K, donc est total dans $\mathscr{C}(K)$ d'après le théorème de Stone-Weierstrass.

Inversement, soit μ une mesure positive quelconque sur K; μ est limite vague de mesures positives discrètes μ_i sur K; et pour tout $x \in G$, $f(x) = \int [x, t]\, d\mu(t)$ est limite des $f_i(x) = \int [x, t]\, d\mu_i(t)$; comme $f_i \in P$, on a donc aussi $f \in P$. On peut donc énoncer, en remplaçant la notation K par $\hat{G}_d$:

Théorème 2. *Soit* G *un groupe abélien discret, et soit* $\hat{G}_d$ *le groupe compact de ses caractères. L'application* $\mu \to \mathrm{f}_\mu$ *qui à toute* $\mu \in \mathscr{M}^+(\hat{\mathrm{G}}_d)$ *associe la fonction* $\mathrm{f}_\mu(\mathrm{x}) = \int [\mathrm{x}, \mathrm{t}]\, \mathrm{d}\mu(\mathrm{t})$ *est une bijection sur le cône* P *des fonctions de type positif sur* G.

Le théorème de Bochner-Weil dans le cas général

Soit G un groupe abélien localement compact, et soit $\hat{G}$ le groupe de ses caractères continus; $\hat{G}$ est localement compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Pour toute mesure de Radon $\mu \geqq 0$ bornée sur $\hat{G}$, la fonction f_μ définie par $f_\mu(x) = \int [x, t]\, d\mu(t)$ est continue et de type positif.

Nous voulons montrer que la réciproque est vraie. La difficulté consiste en ce que le cône des fonctions de type positif n'a pas de base compacte pour les topologies usuelles; pour lever cette difficulté, plusieurs voies s'offrent à nous:

a) Remarquons que $\hat{G} \subset \hat{G}_d$ et que l'application identique φ de $\hat{G}$ dans $\hat{G}_d$ est continue; donc pour toute mesure positive bornée μ sur $\hat{G}$, $\varphi(\mu)$ est