Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DEUX EXEMPLES CLASSIQUES DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Kapitel: théorème de Bernstein et ses généralisations

Autor: Choquet, Gustave

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43205

Théorème 6. *1)* Q *est un chapeau de* P, *et* $\mathscr{E}$ (Q) $=$ K $\cup$ $\{0\}$. *2) Pour toute* f $\in$ P, f *est continue et il existe sur* $\hat{G}$ *une mesure de Radon unique* $\mu \geqq 0$ *telle que*

$$f(x) = \int [x, t]\, d\mu(t) \qquad \textit{pour tout } x \in G\,.$$

Démonstration. 1) Le lemme 4 montre que $P \dot{-} Q = \{f \in P : \|f\| > 1\}$ est convexe, donc Q, déjà convexe et compact, est un chapeau de P; c'est même un chapeau universel en ce sens que P est réunion des nQ. Les éléments extrémaux de Q sont donc 0 et les éléments extrémaux de P de norme 1; d'après le lemme 5, ce sont des caractères continus de G.

Inversement, si f est un caractère continu de G c'est, d'après le théorème 2, un élément extrémal du cône P_d des fonctions de type positif sur G discret; comme $P \subset P_d$, c'est à fortiori un élément extrémal de P, donc $f \in \mathscr{E}(Q)$.

2) Tout $f \in Q$, donc aussi tout $f \in P$, est résultante d'une mesure positive μ portée par le compact $K \cup \{0\}$, ou ce qui revient au même, portée par K puisque toute mesure portée par 0 a une résultante nulle.

Autrement dit, pour toute $\alpha \in L^1$ on a:

$$\int f\alpha\, dx = \int \left(\int [x, t]\, \alpha(x)\, dx \right) d\mu(t)\,.$$

Or soit g la fonction sur G définie par $g(x) = \int [x, t]\, d\mu(t)$; elle est continue et bornée, et la formule de Fubini montre que:

$$\int g\alpha\, dx = \int \left(\int [x, t]\, \alpha(x)\, dx \right) d\mu(t)\,,$$

d'où $\int f\alpha\, dx = \int g\alpha\, dx$ pour tout $\alpha \in L^1$, d'où $f = g$.

L'unicité de μ a été démontrée ci-dessus en 3. *a*.

Le théorème de Bernstein et ses généralisations

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I de **R**, de la forme $]-\infty, a[$, où a est fini ou $+\infty$. Le théorème de Bernstein affirme que si f a des dérivées de tous ordres et si f et ses dérivées sont positives, il existe une mesure $\pi \geqq 0$ (d'ailleurs unique) sur $\mathbf{R}^+$ telle que l'on ait pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \int e^{tx}\, d\pi(t)\,.$$

Ce théorème, ainsi que ses généralisations dans diverses directions se démontre simplement en utilisant la notion d'élément extrémal. Nous appliquerons cette méthode à l'étude des fonctions absolument monotones dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$; le théorème de Bernstein en sera un cas particulier.

Définition 7. *Soit* C *un cône convexe* de $\mathbf{R}^n$ *d'intérieur non vide*; *soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, *et soit* f *une fonction numérique réelle sur* Ω.

On dit que f *est* C-*absolument monotone si* f $\geqq 0$ *et si pour toute famille finie* (a_i) *d'éléments de* C, *la fonction* $\mu * \mathrm{f}$ *(où* μ *est le produit de convolution des mesures* $(\varepsilon_0 - \varepsilon_{a_i})$*) est positive en tout point de* Ω *où elle est définie.*

L'ensemble $\mathscr{A}(\Omega, C)$ des fonctions C-absolument monotones dans Ω est évidemment un cône convexe de $\mathscr{F}(\Omega, \mathbf{R})$, fermé pour la topologie de la convergence simple, donc faiblement complet dans $\mathscr{F}(\Omega, \mathbf{R})$.

Lemme 8. *1) Toute fonction* $\mathbf{R}^+_-$*-absolument monotone sur un intervalle ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}$ *est continue.*

2) Toute $\mathrm{f} \in \mathscr{A}(\Omega, \mathrm{C})$ *est continue (où* Ω *et* $\mathrm{C} \subset \mathbf{R}^n$).

3) Toute famille (f_i) *d'éléments de* $\mathscr{F}(\Omega, \mathrm{C})$ *qui converge simplement en tout point d'un sous-ensemble* D *partout dense de* Ω, *converge uniformément sur tout compact de* Ω.

Démonstration. 1) La condition $(\varepsilon_0 - \varepsilon_a) * f \geqq 0$ pour $a \geqq 0$ exprime que $\Delta_a(x) = f(x) - f(x-a) \geqq 0$ lorsque x et $(x-a) \in \Omega$; donc f est croissante.

La condition $(\varepsilon_0 - \varepsilon_b) * (\varepsilon_0 - \varepsilon_a) * f \geqq 0$ exprime que $\Delta_a(x)$ est fonction croissante de x. Donc si f est continue au point x, elle l'est aussi pour tout $y \leqq x$; et comme les points de continuité de f sont partout denses dans Ω, f est continue.

2) Supposons, ce qu'on peut toujours faire en choisissant dans C les vecteurs u_j de la base de $\mathbf{R}^n$, que $\mathbf{R}^n_+ \subset C$; il s'agit alors de montrer que pour tout pavé $P = \prod [\alpha_j, \beta_j] \subset \Omega$, f est continue sur P.

a) Utilisons le fait que dans P, $\Delta_a(x) = f(x) - f(x-a)$ est fonction croissante de x; ceci entraîne que:

$$0 \leqq f(\beta) - f(\beta - a) \leqq \sum_{j=1}^{j=n} (f(\beta) - f(\beta - a_j u_j)) .$$

Or f est séparément continue par rapport à chaque variable, donc $(f(\beta) - f(\beta - a_j u_j))$ tend vers 0 avec a_i, d'où la continuité sur P au point β.

b) Si l'oscillation de f dans un voisinage V de β dans P est $\leqq \varepsilon$, l'inégalité $0 \leqq f(x) - f(x-a) \leqq f(\beta) - f(\beta - a)$ montre qu'elle est $\leqq \varepsilon$ dans tout translaté de V contenu dans P.

3) Comme les f_i sont croissantes et convergent sur D, on peut les supposer localement uniformément bornées. Si donc le filtre donné est un

ultrafiltre $\mathcal{U}$, les f_i convergent partout dans Ω. Leur limite f appartient à $\mathcal{A}(\Omega, C)$, donc est continue. Montrons, avec les notations du (2), que la convergence est uniforme sur tout pavé $P \subset \Omega$.

Il suffit de reprendre les inégalités du (2): Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des $a_j > 0$ tels que $0 \leqq f(\beta) - f(\beta - a_j u_j) \leqq \varepsilon$. Les a_j étant fixés, il existe un $X \in \mathcal{U}$ tel que, pour tout $i \in X$ on ait $|f - f_i| \leqq \varepsilon$ aux points β et $(\beta - a_j u_j)$. L'oscillation de f_i est donc plus petite que $3n\varepsilon$ dans le petit pavé $\{x : \beta - a \leqq x \leqq \beta\}$; elle est donc plus petite que $3n\varepsilon$ dans tout translaté de ce pavé contenu dans P.

Quand le filtre donné n'est pas un ultrafiltre, la convergence annoncée a lieu pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$, et comme la limite f est donnée sur D, f ne dépend pas de $\mathcal{U}$, d'où la propriété annoncée pour $\mathcal{F}$.

Lemme 9. *Si Ω est* C*-stable, en ce sens que* $\Omega - \mathrm{C} = \Omega$, *tout élément extrémal de* $\mathcal{A}(\Omega, \mathrm{C})$ *est de la forme* cf, *où* $\mathrm{c} \in \mathbf{R}^+$ *et* f *une exponentielle de la forme* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{l(x)}$ *où* l *est une forme linéaire positive sur* C.

Démonstration. Pout tout f définie dans Ω et pout tout $a \in C$, l'hypothèse $\Omega - C \subset \Omega$ entraîne que $\varepsilon_a * f$ est partout définie dans Ω; il en est donc de même de $(\varepsilon_0 - \varepsilon_a) * f$.

En outre, si $f \in \mathcal{A}(\Omega, C)$, il en est de même de $\varepsilon_a * f$ et $(\varepsilon_0 - \varepsilon_a) * f$ d'après les relations:

$$\mu * (\varepsilon_a * f) = \varepsilon_a * (\mu * f); \quad (\mu * (\varepsilon_0 - \varepsilon_a)) * f = \mu * ((\varepsilon_0 - \varepsilon_a) * f).$$

Donc si f est extrémal dans le cône $\mathcal{A}(\Omega, C)$, la relation $f = (\varepsilon_a * f) + (\varepsilon_0 - \varepsilon_a) * f$ montre que pour tout $a \in C$, $\varepsilon_a * f = k(a) f$, où $k(a)$ est une constante $\geqq 0$.

Comme $f \neq 0$ on peut supposer, grâce au besoin à une translation, que $0 \in \Omega$ et que $f(0) \neq 0$; et même, en multipliant f par une constante, que $f(0) = 1$; on en déduit $k(a) = f(-a)$, d'où l'identité $f(x-a) = f(x) f(-a)$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $a \in C$.

Comme f est continue, un raisonnement élémentaire montre que f est la restriction à Ω d'une exponentielle $e^{l(x)}$. Enfin, pour tout $x \in C$, on doit avoir $f(-x) \leqq f(0)$, d'où $l(x) \geqq 0$ sur C.

Théorème 10. *Soit* C *un cône convexe de* $\mathbf{R}^n$, *d'intérieur non vide ; soit* C^0 *son polaire ; et soit* Ω *un ouvert* C*-stable de* $\mathbf{R}^n$.

1) Pour toute $\mathrm{f} \in \mathcal{A}(\Omega, \mathrm{C})$ *il existe une mesure unique* $\pi \geqq 0$ *sur le polaire* C^0, *telle que :*

(6) $$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \int \mathrm{e}^{t \cdot x}\, \mathrm{d}\mu(\mathrm{t}).$$

2) L'ensemble $\mathscr{A}$ (Ω, C) *est identique à l'ensemble des fonctions* f *indéfiniment dérivables dans* Ω *dont toutes les dérivées partielles associées à des vecteurs de* C *sont positives ; chacune de ces dérivées est convexe et analytique.*

3) Pour toute mesure $\mu \geqq 0$ *sur* C^0, *si l'on note* f *l'application de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $[0, \infty]$ *définie par la formule* (6), *l'ensemble* X *des* x *tels que* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) < \infty$ *est, ou bien vide, ou bien convexe et* C*-stable. Dans ce dernier cas, sur l'ouvert convexe et* C*-stable* $\Omega = \overset{\circ}{\mathrm{X}}$, *la fonction* f *est convexe, analytique, et appartient à* $\mathscr{A}$ (Ω, C). *En outre, pour tout ouvert* C*-stable* Ω' *et toute* $\mathrm{f}' \in \mathscr{A}(\Omega', \mathrm{C})$, *tels que* f *et* f$'$ *coïncident sur un sous-ouvert de* $\Omega \cap \Omega'$, *on a* $\Omega' \subset \Omega$, *et* f$'$ *est la restriction de* f *à* Ω'.

Démonstration. 1) Soit D une partie dénombrable et partout dense de Ω; le lemme 8 montre que sur $\mathscr{A}(\Omega, C)$ la topologie de la convergence simple est identique à la topologie de la convergence simple sur D, donc le cône faiblement complet $\mathscr{A}(\Omega, C)$ est métrisable.

Or pour tout $l \in C^0$, la fonction $e^l\colon x \to e^{l(x)}$ appartient à $\mathscr{A}(\Omega, C)$ et l'injection $l \to e^l$ de C^0 dans $\mathscr{A}(\Omega, C)$ est une homéomorphie. Donc l'image de C^0 dans $\mathscr{A}(\Omega, C)$ est un ensemble borélien qui rencontre toute génératrice extrémale de $\mathscr{A}(\Omega, C)$. Compte tenu de 1_c et ce que pour tout $x \in \Omega$, l'application $f \to f(x)$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{F}(\Omega, \mathbf{R})$, il existe donc une $\pi \geqq 0$ sur C vérifiant la relation (6).

Son unicité est immédiate: Supposons, ce qu'on peut toujours faire, que $0 \in \Omega$; alors π est bornée et son unicité résulte de ce que, si u_i désigne une base de $\mathbf{R}^n$ contenue dans C, les fonctions de la forme $e^{-t(\sum_i n_i u_i)}$, où $n_i \in \mathbf{N}$, constituent d'après le théorème de Stone-Weierstrass, un ensemble total dans $\mathscr{C}_0(C^0)$.

De cette unicité de π résulte, d'après 1_c, que toute $e^{t \cdot x}$ où $t \in C^0_?$ est extrémale dans $\mathscr{A}(\Omega, C)$.

2) Soit A l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω telles que, pour tout produit Δ de dérivations associées à des vecteurs de C, on ait $\Delta f \geqq 0$.

Pour $a \in C$ et $f \in A$, on a $(\varepsilon_0 - \varepsilon_a) * f \in A$, car $\Delta((\varepsilon_0 - \varepsilon_a) * f) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_a) * \Delta f$, qui est positive puisque Δf est croissante pour l'ordre associé à C.

On a donc $\mu * f \geqq 0$ pour tout produit μ d'opérateurs $(\varepsilon_0 - \varepsilon_a)$, d'où $f \in \mathscr{A}(\Omega, C)$.

Inversement toute $f \in \mathscr{A}(\Omega, C)$ admet, d'après 10. 1, une représentation intégrale de la forme (6). Un raisonnement, classique dans l'étude de la transformation de Laplace, et basé sur la croissance de l'exponentielle, montre alors que f est indéfiniment dérivable dans Ω, et que toutes ses dérivées partielles s'obtiennent par le calcul de dérivation formelle sous le signe intégrale. Il en résulte que toutes les dérivées partielles associées à des vecteurs de C sont positives.

Le même raisonnement classique montre que f est analytique dans Ω; sa convexité est évidente puisque toute $e^{t \cdot x}$ est convexe.

3) Pour tout $t \in C^0$, la fonction $x \to e^{t \cdot x}$ est convexe et croissante (pour le préordre sur $\mathbf{R}^n$ défini par C); donc f est aussi convexe (au sens large) et croissante. L'ensemble $X = \{x : f(x) < \infty\}$ est donc convexe et C-stable.

Si $X \neq \varnothing$, la C-stabilité de X entraîne que le convexe $\mathring{X}$ n'est pas vide, et est aussi C-stable. Sur l'ouvert $\Omega = \mathring{X}$, la fonction f est finie et convexe, donc continue. Le raisonnement du 10. 2 montre alors que f est analytique dans Ω.

Si Ω' est C-stable, $\Omega \cap \Omega'$ l'est aussi; il est donc *connexe*. Or f et f' étant analytiques, l'ensemble des x de $\Omega \cap \Omega'$ en lesquels f et f' ont toutes leurs dérivées égales est à la fois ouvert et fermé relativement à $\Omega \cap \Omega'$; comme il n'est pas vide, il est identique à $\Omega \cap \Omega'$. Ceci démontre la coïncidence de f, f' sur $\Omega \cap \Omega'$; montrons enfin que $\Omega' \subset \Omega$:

Pour tout $x \in \Omega \cup \Omega'$, est défini, ou bien $f(x)$, ou bien $f'(x)$, ou simultanément $f(x)$ et $f'(x)$, avec $f(x) = f'(x)$; soit $g(x)$ ce nombre unique.

La fonction g est définie sur l'ouvert C-stable $\Omega \cup \Omega'$, et en tout point ses dérivées partielles relatives à des vecteurs de C sont $\geqq 0$, donc $g \in \mathscr{A}(\Omega \cup \Omega', C)$.

Soient respectivement μ, ν les mesures sur C^0 qui fournissent les représentations intégrales de f et g; comme f, g coïncident sur Ω, on a $\mu = \nu$ d'après 10. 1.

Or $\int e^{t \cdot x} \, d\nu(t) < \infty$ sur $\Omega \cup \Omega'$, d'où la même relation pour μ, ce qui montre que $\Omega' \subset X$, d'où aussi $\Omega' \subset \Omega$.

Remarque 11. 1) Le corollaire 13 montrera que toute $f \in \mathscr{A}(\Omega, C)$ est analytique, même lorsque Ω n'est pas C-stable. On peut donc étendre la fin de l'énoncé 10. 3 à ces fonctions sous la forme suivante:

« Pour tout ouvert connexe Ω' et toute $f' \in \mathscr{A}(\Omega', C)$ tels que f et f' coïncident sur un sous-ouvert non vide de $\Omega \cap \Omega'$, on a $\Omega' \subset \Omega$, et f' est la restriction de f à Ω'. »

Pour le voir, on montre que si $\Omega' \not\subset \Omega$, on peut agrandir un peu Ω pour obtenir un ouvert C-stable $\Omega'' \subset (\Omega \cup \Omega')$ et une fonction $f'' \in \mathscr{A}(\Omega'', C)$, qui coïncide avec f sur Ω. Il suffit ensuite d'appliquer le même raisonnement qu'en 10. 3 pour montrer qu'un tel Ω'' ne peut exister.

2) Il résulte du théorème 10 que pour tout ouvert C-stable Ω, toute $f \in \mathscr{A}(\Omega, C)$ se prolonge en une fonction $\hat{f} \in \mathscr{A}(\hat{\Omega}, C)$, où $\hat{\Omega}$ est l'enveloppe convexe de Ω.

Nous allons maintenant étudier $\mathscr{A}(\Omega, C)$ pour un ouvert Ω quelconque.

Théorème 12. *Désignons par* P_n *l'ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *constitué par les points à coordonnées* >0. *Alors, pour tout ouvert non vide* Ω *de la forme* $\mathrm{P}_n \cap (\bigcap\limits_i (\mathrm{x}_i - \mathrm{P}_n))$, *les éléments extrémaux de* $\mathscr{A}(\Omega, \mathbf{R}_+^n)$ *sont les monômes à coefficients* >0.

Et tout $\mathrm{f} \in \mathscr{A}(\Omega, \mathbf{R}_+^n)$ *est somme d'une série entière à coefficients* $\geqq 0$.

Démonstration. 1) Pour toute suite $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ d'éléments de $]0, 1]$, et tout $x = (x_i) \in \Omega$, on a aussi $(\alpha_i x_i) \in \Omega$. Pour tout $f \in \mathscr{A}(\Omega, \mathbf{R}_+^n)$ on désignera par f_α la fonction sur Ω définie par:

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = f(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n) .$$

Les fonctions f_α et $g_\alpha = (f - f_\alpha)$ appartiennent évidemment à $\mathscr{A}(\Omega, \mathbf{R}_+^n)$, donc si f est extrémale dans le cône $\mathscr{A}(\Omega, \mathbf{R}_+^n)$, la relation $f = f_\alpha + g_\alpha$ montre que $f_\alpha = k(\alpha) f$; autrement dit, pour tout $\alpha \in (]0, 1])^n$ et tout $x \in \Omega$, on a:

$$f(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n) = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) f(x_1, \ldots, x_n) .$$

Comme f est continue (lemme 8), un raisonnement élémentaire montre alors que f est un produit de la forme $a\, x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$. Cette fonction est indéfiniment dérivable par rapport à x_1 et comme $f \in \mathscr{A}(\Omega, \mathbf{R}_+^n)$, toutes ses dérivées par rapport à x_1 sont $\geqq 0$; ceci ne peut avoir lieu que si p_1 est un entier $\geqq 0$; même raisonnement pour chaque p_i, donc f est un monôme, avec évidemment $a > 0$.

2) Comme en 10. 2 on vérifie que toute fonction dans Ω dont les dérivées partielles sont positives appartient à $\mathscr{A}(\Omega, \mathbf{R}_+^n)$; c'est en particulier le cas de tout monôme $x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$. Soit M le sous-ensemble dénombrable de $\mathscr{A}(\Omega, \mathbf{R}_+^n)$ constitué par ces monômes; comme en 10. 1, on peut montrer que pour tout $f \in \mathscr{A}(\Omega, \mathbf{R}_+^n)$ il existe une mesure positive sur M dont la résultante est f; autrement dit f est une somme de monômes à coefficients $\geqq 0$; les propriétés élémentaires des séries entières entraînent l'unicité de ces coefficients. Il en résulte que tout monôme est un élément extrémal de $\mathscr{A}(\Omega, \mathbf{R}_+^n)$.

Corollaire 13. *Pour tout cône convexe* C *de* $\mathbf{R}^n$ *d'intérieur non vide et tout ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^n$ *:*

1) Toute $f \in \mathscr{A}(\Omega, C)$ *est analytique,*

2) $\mathscr{A}(\Omega, C)$ *est identique à l'ensemble des fonctions* f *indéfiniment dérivables, dans* Ω, *dont toutes les dérivées partielles associées à des vecteurs de* C *sont positives.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bucy, R. S. et G. Maltese, Extreme positive definite functions and Choquet's representation Theorem. *Jour. Math. Anal. Appl.*, 1965 ou 1966.
[2] Choquet, G., Theory of capacities. *Annales Inst. Fourier*, 5, 1953, 131-295.
[3] —— et P. A. Meyer, Existence et unicité des représentations intégrales. *Ann. Inst. Fourier*, 13, 1963, 139-154.

(Reçu le 1er mai 1968)

Prof. G. Choquet
Inst. H. Poincaré
12, rue Pierre Curie
Paris 5e