SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS

Hubert DELANGE

A la mémoire de J. Karamata

1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étendre aux fonctions de plusieurs entiers strictement positifs quelques notions usuelles relatives aux fonctions d'un entier strictement positif — communément appelées « fonctions arithmétiques » — et d'en étudier les propriétés élémentaires.

Nous désignerons par $\mathscr{A}_q$ l'ensemble des fonctions réelles ou complexes de q entiers strictement positifs.

Pour la simplicité de l'exposé, nous nous bornerons au cas où $q \leqslant 2$, mais il n'y a aucune différence essentielle entre le cas où $q = 2$ et le cas où $q > 2$.

Dans toute la suite, a et b étant deux entiers strictement positifs, le symbole (a, b), considéré isolément, désigne, comme il est d'usage, le plus grand commun diviseur de a et b.

$a | b$ signifie « a divise b ». $a \nmid b$ signifie « a ne divise pas b ».

La lettre p désigne toujours un nombre premier.

2. $\mathscr{A}_2$ COMME ALGÈBRE SUR $\mathbf{C}$

Il est classique de munir $\mathscr{A}_1$ d'une structure d'algèbre sur $\mathbf{C}$ de la façon suivante:

L'addition de deux éléments de $\mathscr{A}_1$ et la multiplication d'un élément de $\mathscr{A}_1$ par un nombre complexe sont définis comme il est habituel pour les fonctions complexes définies sur un ensemble donné — ce qui fait de l'ensemble de ces fonctions un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. On prend comme multiplication de deux éléments de $\mathscr{A}_1$ la convolution définie par

$$(f_* g)(n) = \sum_{d/n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

On peut faire la même chose pour $\mathscr{A}_2$.

On définit encore l'addition de deux éléments de $\mathscr{A}_2$ et la multiplication d'un élément de $\mathscr{A}_2$ par un nombre complexe à la manière habituelle.

On prend comme multiplication de deux éléments de $\mathscr{A}_2$ la convolution définie comme suit:

$f_* g$ est la fonction h définie par

$$h(m,n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f(d_1, d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right).$$

On vérifie immédiatement que la convolution est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition, et que, quels que soient f et $g \in \mathscr{A}_2$ et $\alpha \in \mathbf{C}$, on a

$$(\alpha f)_* g = f_* (\alpha g) = \alpha (f_* g).$$

On a donc ainsi fait de $\mathscr{A}_2$ une algèbre sur $\mathbf{C}$.

2.1. On voit immédiatement que, comme $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ possède une unité. C'est la fonction e_2 définie par

$$e_2(m,n) = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n = 1, \\ 0 \text{ dans le cas contraire } ^{1)}. \end{cases}$$

On voit aussi que les éléments inversibles de $\mathscr{A}_2$ sont les fonctions f pour lesquelles

$$f(1,1) \neq 0. \tag{1}$$

En effet, d'après la définition de la convolution, pour que $f_* g = e_2$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f(d_1, d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) = e_2(m,n) \tag{2}$$

quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Pour $m = n = 1$, ceci se réduit à

$$f(1,1)\, g(1,1) = 1,$$

et on voit ainsi que la condition (1) est nécessaire pour que f soit inversible.

---

1) Nous désignerons par e_1 l'unité de $\mathscr{A}_1$. On a

$$e_1(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 1, \\ 0 \text{ pour } n > 1. \end{cases}$$

Si maintenant on a (1), on voit qu'il est possible de déterminer g de façon que l'on ait (2) quels que soient m et $n \geqslant 1$.

On détermine $g(m, n)$ pour m et n quelconques $\geqslant 1$ en utilisant une récurrence sur n et, pour chaque n, une récurrence sur m.

On détermine d'abord $g(m, 1)$ pour tous les $m \geqslant 1$ en prenant

$$g(1, 1) = \frac{1}{f(1, 1)} \tag{3}$$

puis, pour $m > 1$,

$$g(m, 1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d/m \\ d>1}} f(d, 1) g\left(\frac{m}{d}, 1\right). \tag{4}$$

Ensuite, $g(m, n)$ étant déjà déterminé pour $n \leqslant q$ et m quelconque $\geqslant 1$, on détermine $g(m, q+1)$ pour tous les $m \geqslant 1$ en prenant

$$g(1, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d/q+1 \\ d>1}} f(1, d) g\left(1, \frac{q+1}{d}\right) \tag{5}$$

puis, pour $m > 1$,

$$g(m, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/q+1 \\ d_1+d_2>2}} f(d_1, d_2) g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{q+1}{d_2}\right). \tag{6}$$

Il résulte de (3) et (4) que (2) a lieu pour $n = 1$ et m quelconque $\geqslant 1$. Pour chaque $q \geqslant 1$, il résulte de (5) et (6) que (2) a lieu pour $n = q+1$ et m quelconque $\geqslant 1$.

Naturellement, l'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{A}_2$ est un groupe avec la convolution comme loi. Nous désignerons ce groupe par G_2 et nous désignerons de même par G_1 le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{A}_1$ (qui sont les fonctions arithmétiques telles que $f(1) \neq 0$).

Dans $\mathscr{A}_2$ comme dans $\mathscr{A}_1$ nous désignerons par f^{-*} l'élément inverse de f, s'il existe.

3. G_2 PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES

h_1 et h_2 étant deux fonctions de $\mathscr{A}_1$, nous désignerons par $h_1 \otimes h_2$ la fonction h de $\mathscr{A}_2$ définie par

$$h(m, n) = h_1(m) h_2(n).$$

A et B étant deux parties de $\mathscr{A}_1$, $A \otimes B$ sera l'ensemble des éléments $h_1 \otimes h_2$ de $\mathscr{A}_2$, où $h_1 \in A$ et $h_2 \in B$.

Il est évident que $G_1 \otimes G_1 \subset G_2$ et que $e_1 \otimes e_1 = e_2$.

D'autre part, on voit immédiatement que, si $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathscr{A}_1$, on a

$$(f_1 \otimes f_2)_* (g_1 \otimes g_2) = (f_{1*}\, g_1) \otimes (f_{2*}\, g_2) , \tag{7}$$

et il en résulte que, si f et $g \in G_1$,

$$(f \otimes g)^{-*} = f^{-*} \otimes g^{-*} . \tag{8}$$

On voit ainsi que $G_1 \otimes G_1$ est un sous-groupe de G_2.

On peut aussi le voir en remarquant que c'est l'image de G_2 par un certain endomorphisme.

En effet, considérons l'application E de G_2 dans $\mathscr{A}_2$ qui à la fonction f de G_2 fait correspondre la fonction h définie par

$$h(m, n) = \frac{f(m, 1) f(1, n)}{f(1, 1)} .$$

On voit que E est un endomorphisme de G_2:

D'abord, il est évident que, quel que soit $f \in G_2$, $E(f) \in G_2$.

D'autre part, quels que soient f et $g \in G_2$,

$$E(f_*\, g) = E(f)_*\, E(g) .$$

L'image de G_2 par E est $G_1 \otimes G_1$ car, d'une part, il est clair que, quel que soit $f \in G_2$, $E(f) \in G_1 \otimes G_1$, d'autre part, on voit immédiatement que, si $f \in G_1 \otimes G_1$, $E(f) = f$.

Il est à noter que ces propriétés entraînent que $E^2 = E$.

Alors, d'après un résultat classique, G_2 est le produit direct du noyau $E^{-1}(e_2)$ de E et de $E(G_2) = G_1 \otimes G_1$:

Toute $f \in G_2$ peut se mettre de façon unique sous la forme

$$f = g_*\, h , \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1 . \tag{9}$$

Plus précisément, on a

$$h = E(f) \quad \text{et} \quad g = f_*\, h^{-*} .$$

En effet, si g et h sont ainsi déterminés, on a bien $f = g_*\, h$, h appartient à $G_1 \otimes G_1$, et on a

$$E(f) = E(g)_*\, E(h) = E(g)_*\, E^2(f) = E(g)_*\, E(f) ,$$

de sorte que $E(g) = e_2$.

D'autre part, si on a (9), on a nécessairement

$$h = E(f) \quad \text{car} \quad E(h) = h$$

et

$$E(f) = E(g) * E(h) = e_2 * E(h) = E(h).$$

On voit de suite que $E^{-1}(e_2)$ est l'ensemble des $g \in G_2$ telles que

$$g(1,1) = 1,$$
$$g(m,1) = 0 \quad \text{pour } m > 1$$

et

$$g(1,n) = 0 \quad \text{pour } n > 1.$$

On a ainsi le résultat suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$g(1,1) = 1,$$
$$g(m,1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \qquad \text{et} \qquad g(1,n) = 0 \quad \text{pour } n > 1,$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$f(m,n) = \frac{1}{f(1,1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right). \tag{10}$$

On peut supprimer dans cet énoncé la condition $g(1,1) = 1$, car elle est une conséquence de (10) pour $m = n = 1$. On peut aussi supprimer dans (10) le facteur $\dfrac{1}{f(1,1)}$, en multipliant la fonction g par ce facteur. On obtient ainsi l'énoncé suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$g(m,1) = 0 \text{ pour } m > 1 \qquad \text{et} \qquad g(1,n) = 0 \text{ pour } n > 1 \tag{11}$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$f(m,n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right). \tag{12}$$

4. Fonctions multiplicatives et fonctions additives

La fonction f de $\mathscr{A}_2$ sera dite multiplicative si l'on a

$$f(1,1) = 1$$

et $f(m' m'', n' n'') = f(m', n') f(m'', n'')$ lorsque $(m' n', m'' n'') = 1$ [1].

Elle sera dite additive si l'on a

$f(m' m'', n' n'') = f(m', n') + f(m'', n'')$ lorsque $(m' n', m'' n'') = 1$ (ce qui entraîne $f(1, 1) = 0$, comme on le voit en prenant $m' = m'' = n' = n'' = 1$).

Le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de m et n sont des fonctions multiplicatives de m et n. Il en est de même de la fonction égale à 1 quand $(m, n) = 1$ et à zéro quand $(m, n) > 1$.

Le nombre des diviseurs premiers communs à m et n, la somme de ces diviseurs, sont des fonctions additives de m et n.

On voit immédiatement qu'une fonction multiplicative, ou additive, est complètement déterminée quand on connaît ses valeurs pour tous les couples $[p^j, p^k]$, où p est un nombre premier et j et k sont des entiers $\geqslant 0$ tels que $j+k>0$.

Plus précisément, soit ρ_p la fonction de $\mathscr{A}_1$ définie par

$$\rho_p(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \nmid n\,, \\ p^r & \text{si} \quad p^r / n \quad \text{et} \quad p^{r+1} \nmid n,\ r > 0\,. \end{cases}$$

Si f est multiplicative, on a

$$f(m, n) = \prod_{p/mn} f[\rho_p(m), \rho_p(n)]\,. \tag{13}$$

Si f est additive, on a

$$f(m, n) = \sum_{p/mn} f[\rho_p(m), \rho_p(n)]\,.$$

Dans les deux cas, les valeurs de $f(p^j, p^k)$ peuvent être choisies arbitrairement pour tous les nombres premiers p et tous les couples $[j, k]$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que $j+k>0$.

4.1. Nous désignerons par $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{A}_2$ qui sont multiplicatives, $\mathfrak{M}_1$ désignant l'ensemble des fonctions multiplicatives d'un entier >0.

Il est évident que $\mathfrak{M}_2 \subset G_2$. En fait, $\mathfrak{M}_2$ est un sous-groupe de G_2, comme $\mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de G_1.

Tout d'abord, on voit immédiatement que, si f et $g \in \mathfrak{M}_2$, $f_* g \in \mathfrak{M}_2$.

En effet, si $(m' n', m'' n'') = 1$, on a $(m', m'') = (n', n'') = 1$ et on obtient tous les diviseurs de $m' m''$, chacun une fois, en formant tous les

---

[1] La condition $f(1, 1) = 1$ est conséquence de la deuxième condition si l'on suppose que f n'est pas identiquement nulle. Nous l'introduisons pour écarter la fonction identiquement nulle.

produits $d'_1\,d''_1$ où d'_1/m' et d''_1/m'', et tous les diviseurs de $n'\,n''$, chacun une fois, en formant tous les produits $d'_2\,d''_2$, où d'_2/n' et d''_2/n''.

On a d'ailleurs

$$(d'_1\,d'_2, d''_1\,d''_2) = \left(\frac{m'}{d'_1}\,\frac{n'}{d'_2}, \frac{m''}{d''_1}\,\frac{n''}{d''_2}\right) = 1 .$$

On voit ainsi que, si $h = f_* g$, avec f et $g \in \mathfrak{M}_2$, et si $(m'\,n', m''\,n'') = 1$, on a

$$\begin{aligned} h(m'\,n', m''\,n'') &= \sum_{\substack{d'_1/m', d''_1/m'' \\ d'_2/n',\ d''_2/n''}} f(d'_1 d''_1, d'_2\,d''_2)\, g\left(\frac{m'\,m''}{d'_1\,d''_1}, \frac{n'\,n''}{d'_2\,d''_2}\right) \\ &= \sum_{\substack{d'_1/m', d''_1/m'' \\ d'_2/n',\ d''_2/n''}} f(d'_1, d'_2)\, g\left(\frac{m'}{d'_1}, \frac{n'}{d'_2}\right) f(d''_1, d''_2)\, g\left(\frac{m''}{d''_1}, \frac{n''}{d''_2}\right) \\ &= \left\{\sum_{\substack{d'_1/m' \\ d'_2/n'}} f(d'_1, d'_2)\, g\left(\frac{m'}{d'_1}, \frac{n'}{d'_2}\right)\right\} \left\{\sum_{\substack{d''_1/m'' \\ d''_2/n''}} f(d''_1, d''_2)\, g\left(\frac{m''}{d''_1}, \frac{n''}{d''_2}\right)\right\} \\ &= h(m', n')\, h(m'', n'') . \end{aligned}$$

Pour montrer que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $f^{-*} \in \mathfrak{M}_2$, on peut procéder de la façon suivante.

On montre que, pour chaque nombre premier p, on peut déterminer les nombres $a_p(j, k)$, où j et k sont des entiers $\geqslant 0$ et $j+k>0$, de façon que l'on ait pour j et $k \geqslant 0$ et $j+k>0$

$$f(p^j, p^k) + \sum_{\substack{0 \leq j' \leq j \\ 0 \leq k' \leq k \\ j'+k'>0}} f(p^{j-j'}, p^{k-k'})\, a_p(j', k') = 0 . \tag{14}$$

Pour cela, on fait un raisonnement semblable à celui par lequel on a montré au § 2.1 que, si $f \in \mathscr{A}_2$ et $f(1, 1) \neq 0$, f est inversible.

Ceci dit, on peut déterminer une fonction g de $\mathfrak{M}_2$ par

$$g(p^j, p^k) = a_p(j, k) \qquad \text{pour} \qquad j \geqslant 0, k \geqslant 0, j+k>0 .$$

On sait que $f_* g \in \mathfrak{M}_2$. Mais (14) montre que, si $h = f_* g$, on a

$$h(p^j, p^k) = 0 \qquad \text{pour} \qquad j \geqslant 0, k \geqslant 0, j+k>0 ,$$

et, d'après (13) appliquée à h, ceci entraîne $h = e_2$.

Donc $g = f^{-*}$.

4.1.1. Il est clair que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$ et il résulte de (7) et (8) que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $G_1 \otimes G_1$, donc de G_2.

On voit immédiatement que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. Par suite $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

E étant l'endomorphisme de G_2 considéré au § 3, soit $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M}_2 \cap E^{-1}(e_2)$.

$\mathfrak{N}_2$ est un sous-groupe de G_2, comme intersection de deux sous-groupes, donc est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

$\mathfrak{M}_2$ est produit direct de $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$.

En effet, on a vu au § 3 que G_2 est produit direct de $E^{-1}(e_2)$ et $G_1 \otimes G_1$ et que, dans l'expression d'une fonction f de G_2 sous la forme

$$f = g_* h, \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1,$$

on a $h = E(f)$ et $g = f_* h^{-*}$.

Mais on voit immédiatement que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $E(f) \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$. Donc, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ et par suite $h \in \mathfrak{M}_2$, $g \in \mathfrak{M}_2$ et finalement $g \in \mathfrak{N}_2$. De plus, l'expression de f sous la forme

$$f = g_* h, \quad \text{où} \quad g \in \mathfrak{N}_2 \quad \text{et} \quad h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1,$$

est unique parce que $\mathfrak{N}_2 \subset E^{-1}(e_2)$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$.

On voit de suite que $\mathfrak{N}_2$ est l'ensemble des fonctions g de $\mathfrak{M}_2$ qui satisfont à

$$g(p^j, p^k) = 0 \quad \text{quand } j \text{ ou } k = 0 \text{ mais } j+k>0,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$g(m, n) = 0 \quad \text{quand } \{p \mid p/m\} \neq \{p \mid p/n\}.$$

5. Fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs

Il est classique d'utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_1$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$, espace vectoriel que nous désignerons par X_1:

a étant une fonction de $\mathscr{A}_1$ et F une fonction de X_1, on désigne par $a \perp F$, par exemple, la fonction G de X_1 définie par

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

On peut de même utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel X_2 des fonctions complexes de deux variables réelles $\geqslant 1$.

a étant une fonction de $\mathscr{A}_2$ et F une fonction de X_2, on désignera par $a \perp F$ la fonction G de X_2 définie par

$$G(x, y) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} a(m, n) F\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}\right).$$

a étant fixée, l'application $F \to a \perp F$ est une application linéaire de X_2 dans X_2.

De plus, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

a) Quelle que soit $F \in X_2$, $e_2 \perp F = F$;

b) Quels que soient $F \in X_2$, $a \in \mathscr{A}_2$ et $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$(\lambda a) \perp F = \lambda (a \perp F) ;$$

c) Quelles que soient $F \in X_2$, a et $b \in \mathscr{A}_2$,

$$a \perp (b \perp F) = (a_* b) \perp F .$$

6. Fonctions génératrices

6.1. A la fonction f de $\mathscr{A}_2$ nous associons la série double

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{f(m, n)}{m^s n^{s'}},$$

où s et s' sont deux variables complexes.

S'il existe des valeurs de s et s' pour lesquelles cette série est convergente, la fonction qu'elle représente est dite « fonction génératrice » de f.

Si les séries associées aux fonctions f et g de $\mathscr{A}_2$ sont absolument convergentes pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, il en est de même de la série associée à $f_* g$ et sa somme est le produit des sommes des deux premières.

Pour le voir, il suffit de considérer la série quadruple

$$\sum_{m_1, m_2, n_1, n_2 \geq 1} \frac{f(m_1, n_1) g(m_2, n_2)}{m_1^s m_2^s n_1^{s'} n_2^{s'}},$$

qui est absolument convergente pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, et de grouper ensemble les termes pour lesquels les produits $m_1 m_2$ et les produits $n_1 n_2$ ont les mêmes valeurs.

Ainsi, comme dans le cas d'une variable, la convolution correspond à la multiplication des fonctions génératrices.

6.2. f étant une fonction de $\mathfrak{M}_2$, et σ et σ' étant deux nombres réels, si l'on a

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k \geqq 0 \\ j-k>0}} \frac{|f(p^j, p^k)|}{p^{j\sigma+k\sigma'}} < +\infty ,$$

la série

$$\sum_{m,n \geqq 1} \frac{f(m,n)}{m^s n^{s'}}$$

est absolument convergente pour $\mathcal{R}s \geqslant \sigma$ et $\mathcal{R}s' \geqslant \sigma'$ et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod_p \left[\sum_{j,k \geqq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{js+ks'}} \right].$$

Pour établir ce résultat, il suffit de prouver que, si $g \in \mathfrak{M}_2$ et si l'on a

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k \geqq 0 \\ j-k>0}} |g(p^j, p^k)| < +\infty ,$$

la série $\sum_{m,n \geqq 1} g(m,n)$ est absolument convergente et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

(15) $$\prod_p [\sum_{j,k \geqq 0} g(p^j, p^k)] .$$

Le résultat voulu s'en déduira en prenant $g(m,n) = \dfrac{f(m,n)}{m^s n^{s'}}$.

Soit $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant.

Le produit infini (15) s'écrit

$$\prod_{r=1}^{-\infty} \left[\sum_{j,k \geqq 0} g(p_r^j, p_r^k) \right].$$

Il est absolument convergent car, pour chaque r,

$$\left| \sum_{j,k \geqq 0} g(p_r^j, p_r^k) - 1 \right| = \left| \sum_{\substack{j,k \geqq 0 \\ j-k>0}} g(p_r^j, p_r^k) \right| \leqslant \sum_{\substack{j,k \geqq 0 \\ j+k>0}} |g(p_r^j, p_r^k)| ,$$

de sorte que

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \left| \sum_{j,k \geq 0} g(p_r^j, p_r^k) - 1 \right| < +\infty .$$

On voit en même temps que le produit infini

$$\prod_{r=1}^{+\infty} \left[\sum_{j,k \geq 0} | g(p_r^j, p_r^k) | \right]$$

est convergent. Soit P sa valeur.

Soient maintenant g_r et h_r les fonctions de $\mathfrak{M}_2$ déterminées par

$$g_r(p^j, p^k) = \begin{cases} g(p^j, p^k) & \text{si} \quad p \leqslant p_r , \\ 0 & \text{si} \quad p > p_r , \end{cases}$$

et

$$h_r(p^j, p^k) = \begin{cases} g(p^j, p^k) & \text{si} \quad p = p_r , \\ 0 & \text{si} \quad p \neq p_r . \end{cases}$$

(j et $k \geqslant 0$, $j + k > 0$).

Il résulte de la formule (13) que, pour chaque couple $[m, n]$, $g_r(m, n)$ tend vers $g(m, n)$ quand r tend vers $+\infty$.

De plus, on voit que, pour chaque $r \geqslant 1$,

$$g_{r+1} = g_r * h_{r+1} \qquad \text{et} \qquad |g_{r+1}| = |g_r| * |h_{r+1}| ,$$

et on en déduit, par récurrence sur r, que, pour chaque $r \geqslant 1$, la série $\sum_{m,n \geq 1} g_r(m, n)$ est absolument convergente et on a

$$\text{(16)} \qquad \sum_{m,n \geq 1} | g_r(m, n) | = \prod_{q=1}^{r} \left[\sum_{j,k \geq 0} | g(p_q^j, p_q^k) | \right]$$

et

$$\text{(17)} \qquad \sum_{m,n \geq 1} g_r(m, n) = \prod_{q=1}^{r} \left[\sum_{j\, k \geq 0} g(p_q^j, p_q^k) \right] .$$

Il résulte de (16) que, quel que soit $x \geqslant 1$, on a pour tout $r \geqslant 1$

$$\sum_{m,n \leq x} | g_r(m, n) | \leqslant P .$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\sum_{m,n \leq x} | g(m, n) | \leqslant P$$

et il en résulte que la série $\sum_{m,n \geq 1} |g(m, n)|$ est convergente.

Maintenant, d'après la formule (13), pour chaque couple $[m, n]$, on a

$$|g_r(m, n)| \leqslant |g(m, n)| \quad \text{quel que soit } r \geqslant 1.$$

Alors (17) donne, par passage à la limite pour r tendant vers $+\infty$,

$$\sum_{m,n \geq 1} g(m, n) = \prod_{q=1}^{+\infty} \left[\sum_{j,k \geq 0} g(p_q^j, p_q^k) \right].$$

(Reçu le 27 avril 1968)

H. Delange
Faculté des Sciences de l'Université de Paris à Orsay
91 - Orsay