# 5. Fonctions de $A_2$ comme opérateurs

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

4.1.1. Il est clair que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$ et il résulte de (7) et (8) que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $G_1 \otimes G_1$, donc de $G_2$.

On voit immédiatement que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. Par suite $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

$E$ étant l'endomorphisme de $G_2$ considéré au § 3, soit $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M}_2 \cap E^{-1}(e_2)$.

$\mathfrak{N}_2$ est un sous-groupe de $G_2$, comme intersection de deux sous-groupes, donc est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

$\mathfrak{M}_2$ est produit direct de $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$.

En effet, on a vu au § 3 que $G_2$ est produit direct de $E^{-1}(e_2)$ et $G_1 \otimes G_1$ et que, dans l'expression d'une fonction $f$ de $G_2$ sous la forme

$$f = g_* h\,, \qquad \text{où} \qquad g \in E^{-1}(e_2) \qquad \text{et} \qquad h \in G_1 \otimes G_1\,,$$

on a $h = E(f)$ et $g = f_* h^{-*}$.

Mais on voit immédiatement que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $E(f) \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$. Donc, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ et par suite $h \in \mathfrak{M}_2$, $g \in \mathfrak{M}_2$ et finalement $g \in \mathfrak{N}_2$. De plus, l'expression de $f$ sous la forme

$$f = g_* h\,, \qquad \text{où} \qquad g \in \mathfrak{N}_2 \qquad \text{et} \qquad h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1\,,$$

est unique parce que $\mathfrak{N}_2 \subset E^{-1}(e_2)$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$.

On voit de suite que $\mathfrak{N}_2$ est l'ensemble des fonctions $g$ de $\mathfrak{M}_2$ qui satisfont à

$$g(p^j, p^k) = 0 \qquad \text{quand } j \text{ ou } k = 0 \text{ mais } j+k>0\,,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$g(m, n) = 0 \qquad \text{quand } \{p \mid p/m\} \neq \{p \mid p/n\}\,.$$

## 5. Fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs

Il est classique d'utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_1$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$, espace vectoriel que nous désignerons par $X_1$:

$a$ étant une fonction de $\mathscr{A}_1$ et $F$ une fonction de $X_1$, on désigne par $a \perp F$, par exemple, la fonction $G$ de $X_1$ définie par

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

On peut de même utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel $X_2$ des fonctions complexes de deux variables réelles $\geqslant 1$.

$a$ étant une fonction de $\mathscr{A}_2$ et $F$ une fonction de $X_2$, on désignera par $a \perp F$ la fonction $G$ de $X_2$ définie par

$$G(x, y) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} a(m, n) F\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}\right).$$

$a$ étant fixée, l'application $F \to a \perp F$ est une application linéaire de $X_2$ dans $X_2$.

De plus, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

*a)* Quelle que soit $F \in X_2$, $e_2 \perp F = F$;

*b)* Quels que soient $F \in X_2$, $a \in \mathscr{A}_2$ et $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$(\lambda a) \perp F = \lambda (a \perp F) ;$$

*c)* Quelles que soient $F \in X_2$, $a$ et $b \in \mathscr{A}_2$,

$$a \perp (b \perp F) = (a_* b) \perp F .$$

## 6. Fonctions génératrices

6.1. A la fonction $f$ de $\mathscr{A}_2$ nous associons la série double

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{f(m, n)}{m^s n^{s'}},$$

où $s$ et $s'$ sont deux variables complexes.

S'il existe des valeurs de $s$ et $s'$ pour lesquelles cette série est convergente, la fonction qu'elle représente est dite « fonction génératrice » de $f$.

Si les séries associées aux fonctions $f$ et $g$ de $\mathscr{A}_2$ sont absolument convergentes pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, il en est de même de la série associée à $f_* g$ et sa somme est le produit des sommes des deux premières.

Pour le voir, il suffit de considérer la série quadruple

$$\sum_{m_1, m_2, n_1, n_2 \geq 1} \frac{f(m_1, n_1) g(m_2, n_2)}{m_1^s m_2^s n_1^{s'} n_2^{s'}},$$

qui est absolument convergente pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, et de grouper ensemble les termes pour lesquels les produits $m_1 m_2$ et les produits $n_1 n_2$ ont les mêmes valeurs.

Ainsi, comme dans le cas d'une variable, la convolution correspond à la multiplication des fonctions génératrices.