

### 3. One-sided version of the Karamata relations

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

#### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### 3. ONE-SIDED VERSION OF THE KARAMATA RELATIONS

From now on  $U$  will stand for a non-decreasing function and  $p > 0$  will be a fixed number such that the integral  $U_p$  converges. Only the case  $U(\infty) = \infty$  is of practical interest. We adhere to the notation (1.5) for  $R_U$  and put

$$(3.1) \quad \underline{r} = \liminf R_U(t), \quad \bar{r} = \limsup R_U(t).$$

We shall also use the notation

$$(3.2) \quad \mathcal{I}_U(t) = \int_t^{\infty} y^{-p-1} U(y) dy.$$

**THEOREM 1.** *For  $U$  to vary dominatedly it is necessary and sufficient that  $\bar{r} < \infty$ . Similarly  $U_p$  varies dominatedly iff  $\underline{r} > 0$ .*

*More precisely: The relation (2.2) with  $\gamma < p$  entails*

$$(3.3) \quad R_U(t) \leq A \quad t > t_0$$

with

$$(3.4) \quad A = \frac{Cp}{p-\gamma} - 1.$$

Conversely, (3.3) implies (2.2) with

$$(3.5) \quad C = A + 1, \quad \gamma = \frac{A}{A+1}p.$$

In like manner, if

$$(3.6) \quad R_U(t) \geq \eta > 0, \quad t > t_0$$

then

$$(3.7) \quad \frac{U_p(tx)}{U_p(t)} \geq K x^{-q}, \quad x > 1, \quad t > t_0$$

with

$$(3.8) \quad K = \frac{\eta}{\eta+1}, \quad q = \frac{p}{\eta+1}.$$

Conversely, if (3.7) holds with  $q < p$  then

$$(3.9) \quad r \geq \frac{K(p-q)}{Kq + (1-K)p}.$$

(Note that necessarily  $K \leq 1$  as can be seen letting  $x \rightarrow 1$  in (3.7). On replacing  $t$  by  $tx^{-1}$  it is seen that (3.7) not only asserts dominated variation of  $U_p$ , but implies uniformity away from the origin.)

PROOF. (i) Using integration by parts and the notation (3.2) it is seen that the definition (1.2) of  $U_p$  leads to the identity

$$(3.10) \quad p \mathcal{J}_U(t) = U_p(t) + t^{-p} U(t)$$

valid at all points of continuity. If (2.2) holds with  $\gamma < p$  we conclude for  $t > t_0$

$$(3.11) \quad U_p(t) + t^{-p} U(t) \leq Cp \cdot U(t) \int_t^\infty y^{-p-1} (y/t)^\gamma dy = \\ = C \frac{p}{p-\gamma} t^{-p} U(t)$$

and so (3.3) holds with  $A$  defined in (3.4).

(ii) Assume (3.3). Then by (3.10)

$$(3.12) \quad pt^p \mathcal{J}_U(t) \leq (A+1) U(t)$$

or

$$(3.13) \quad \frac{s^{-p-1} U(s)}{\mathcal{J}_U(s)} \geq \frac{p}{A+1} \cdot \frac{1}{s} \quad s > t_0.$$

Integrating between  $t$  and  $tx > t$  we get

$$(3.14) \quad \log \frac{\mathcal{J}_U(t)}{\mathcal{J}_U(tx)} \geq \frac{p}{A+1} \log x, \quad t > t_0.$$

Thus from (3.12)

$$(3.15) \quad (A+1) t^{-p} U(t) \geq p \mathcal{J}_U(t) \geq p \mathcal{J}_U(tx) \cdot x^{p/(A+1)}$$

and by the definition (3.2)

$$(3.16) \quad p \mathcal{J}_U(tx) \geq U(tx) \cdot (tx)^{-p}.$$

Accordingly, (2.2) holds with  $C$  and  $\gamma$  given in (3.5). (This part of the theorem was proved slightly differently in [2].)

(iii) Assume (3.6). As in the last part we conclude

$$(3.17) \quad \log \frac{\mathcal{J}_U(t)}{\mathcal{J}_U(tx)} \leq \frac{p}{\eta + 1} \log x, \quad x > 1, t > t_0.$$

A repeated use of (3.10) now shows that

$$(3.18) \quad \begin{aligned} U_p(t) &\leq p\mathcal{J}_U(t) \leq p\mathcal{J}_U(tx) \cdot x^{p/(\eta+1)} = \\ &= x^{p/(\eta+1)} [U_p(tx) + (tx)^{-p} U(tx)]. \end{aligned}$$

From (3.6) with  $t$  replaced by  $tx$  it is seen that the expression within brackets is  $< (1 + \eta^{-1}) U_p(tx)$ , and so the assertion concerning (3.7) is true.

(iv) Assume (3.7) with  $q < p$ . From the definition (1.2) of  $U_p$  we get by Fubini's theorem

$$(3.19) \quad p \int_0^t y^{p-1} U_p(y) dy = U(t) + t^p U_p(t)$$

which proves that the integral on the left converges for all  $t > 0$ . Let  $B$  stand for the value of the left side when  $t = t_0$ . For  $y > t_0$  we can apply (3.7) to conclude

$$(3.20) \quad \begin{aligned} U(t) + t^p U_p(t) &\leq B + pK^{-1} U_p(t) \int_{t_0}^t y^{p-1} (t/y)^q dy < \\ &< B + \frac{p}{p-q} K^{-1} t^p U_p(t). \end{aligned}$$

Divide this inequality by  $U(t)$  and let  $t \rightarrow \infty$ . If  $U(t) \rightarrow \infty$  we get the assertion (3.8). If  $U(t)$  remains bounded there is nothing to be proved because (3.7) implies that  $t^p U_p(t)$  increases at least as fast as  $t^{p-q}$ , and hence  $\underline{r} = \infty$  whenever  $U$  is bounded.

NOTE. Our result lack the perfect symmetry of the original Karamata relations. Starting from (2.2) we get (3.3)-(3.4). However, when we apply the converse with these given values we get (2.2) in the weaker form with  $\gamma$  replaced by a constant  $\gamma' > \gamma$ . Examples given in [2] show that, in an obvious sense, this result is the best possible.