

## 4. Other conditions

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

#### 4. OTHER CONDITIONS

By theorem 1 both  $U$  and  $U_p$  vary dominatedly whenever  $\underline{r} > 0$  and  $\bar{r} < \infty$ . The next theorem gives even simpler criteria for dominated variation that remain applicable in the limiting situations  $\underline{r} = 0$  and  $\bar{r} = \infty$ .

THEOREM 3. *If there exists a number  $\xi > 1$  such that*

$$(4.1) \quad \liminf \frac{U(\xi t)}{U(t)} > 1$$

*then  $U_p$  varies dominatedly. Similarly the relation*

$$(4.2) \quad \liminf \frac{U_p(t/\xi)}{U_p(t)} > 1$$

*implies the dominated variation of  $U$ .*

PROOF. Clearly

$$(4.3) \quad \frac{t^p U_p(t)}{U(t)} \geq \frac{t^p [U_p(t) - U_p(t\xi)]}{U(t)} \geq \xi^{-p} \frac{U(t\xi) - U(t)}{U(t)}.$$

When the right side is bounded away from 0 this implies  $\underline{r} > 0$ , and so  $U_p$  varies dominatedly by theorem 1.

We can go a step further. If, besides (4.1), it is known that  $U$  varies dominatedly with exponent  $\gamma < p$ , then  $t^{-p} U(t)/U_p(t)$  is bounded away from 0, and hence the second inequality in (4.3) implies that

$$(4.4) \quad \liminf \frac{U_p(t) - U_p(t\xi)}{U_p(t)} > 0.$$

This is equivalent to (4.2).

Similarly

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \frac{U_p(t) - U_p(t\xi)}{U_p(t\xi)} &\leq t^{-p} \frac{U(t\xi) - U(t)}{U_p(t\xi)} = \\ &= \frac{\xi^p}{R_U(t\xi)} \frac{U(t\xi) - U(t)}{U(t\xi)}. \end{aligned}$$

The second fraction on the right does not exceed 1, and so (4.2) ensures that  $R_U(t\xi)$  remains bounded, and hence that  $U$  is of dominated variation.

Again, if it is known that  $R_U$  is bounded away from 0 then (4.5) shows that (4.2) implies (4.1).

We have thus proved the

COROLLARY. *If  $U$  is of dominated variation with exponent  $\gamma < p$  then (4.1) implies (4.2). Similarly, if  $U_p$  is of dominated variation with exponent  $-q$  where  $q < p$ , then (4.2) entails (4.1). (In each case both functions are of dominated variation.)*

### 5. RATIO LIMIT THEOREMS

Let  $U$  and  $V$  be non-decreasing unbounded functions, and suppose that  $L$  is slowly varying (= regularly varying with exponent 0).

DEFINITION. *We shall say that  $U$  and  $V$  are  $L$ -equivalent and write*

$$(5.1) \quad V \leftrightarrow UL$$

*if the ratio  $UL/V$  tends to 1 at all points of continuity.*

More precisely, it is required that for each  $\varepsilon > 0$  and fixed  $\lambda > 1$

$$(5.2) \quad (1 - \varepsilon) L(t) U(t/\lambda) \leq V(t) \leq (1 + \varepsilon) L(t) U(t\lambda)$$

for all  $t$  sufficiently large.

THEOREM 4. *Let  $U$  be of dominated variation. In order that there exist a slowly varying function  $L$  such that (5.1) holds it is necessary and sufficient that*

$$(5.3) \quad R_U(t) - R_V(t) \rightarrow 0 \quad \text{boundedly.}$$

Needless to say,  $R_V$  and  $\mathcal{J}_V$  are defined by analogy with  $R_U$  in (1.5) and  $\mathcal{J}_U$  in (3.2).

PROOF. (a) *Necessity.* Assume (5.1) and suppose that  $U$  satisfies the basic inequality (2.2). Obviously the slow variation of  $L$  implies that for  $t$  sufficiently large and all  $x > 1$

$$(5.4) \quad \frac{V(tx)}{V(t)} < C' x^{\gamma'}$$

for any pair of constants  $C' > C$  and  $\gamma' > \gamma$ . Thus  $V$  is of dominated variation, and since  $p > \gamma$  the function  $V_p$  exists.