I. Quelques exemples élémentaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

dite moderne, et qui, au lieu de dégager celles des propriétés de la géométrie classique qui sont valables quel que soit le corps de base, mettra plutôt en évidence des propriétés étranges, spécifiques de la caractéristique.

C'est ainsi que, commençant par quelques propriétés élémentaires nous n'utiliserons dans le premier paragraphe que la définition de la caractéristique p du corps de base K: si l'on forme la progression arithmétique de premier terme zéro, et de raison $x \neq 0$, définie par

$$u_{n+1} = u_n + x$$

$$u_0 = 0$$

cette progression est périodique

$$u_{n+p} = u_n$$

et ne comporte, comme termes distincts que les termes u_0, u_1, ... u_{p-1}, car

$$u_p = u_0 = 0$$

et le nombre premier p qui a cette propriété est le même pour tous les éléments x non nuls de K.

Nous verrons, par exemple, que lorsque le corps K est de caractéristique $p = 2$, les diagonales d'un quadrilatère complet ne sont jamais linéairement indépendantes. Quel est le professeur de notre enseignement secondaire qui, après avoir dessiné un quadrilatère complet au tableau, a vraiment ressenti le besoin, avant de parler du triangle diagonal, de s'assurer de l'existence de ce triangle?

I. Quelques exemples élémentaires

a) Un plan affine peut être défini sur un corps K de caractéristique $p = 2$ comme l'ensemble des points qui ont deux coordonnées x, y dans K, avec, comme groupe d'automorphismes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ax + by + c \\ a'x + b'y + c' \end{pmatrix}$$

dont le sous-groupe

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + c \\ y + c' \end{pmatrix}$$

est le groupe des translations.

Considérons trois points ABC non alignés: nous pouvons définir un repère en attribuant à ces points les coordonnées A (0, 0) B (1, 0) C (0, 1), c'est-à-dire en prenant AB et AC pour vecteurs de base.

Désignons par X la translation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$$

qui fait passer de A à B. Elle fait passer du point C à un point D (1, 1) et nous dirons que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme car, à cause de la commutativité de l'addition, la translation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

qui fait passer de A à C fait aussi passer de B à D.
Mais du fait que

$$1 + 1 = 0$$

dans le corps K, la translation X transforme aussi B en A et D en C: elle conserve le parallélogramme, et en désignant par I la transformation identique, on a

$$X^2 = I$$

La translation Y conserve elle aussi le parallélogramme en transformant C en A et D en B:

$$Y^2 = I$$

Dans ces conditions la translation

$$Z = XY = YX$$

produit des précédentes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

conserve elle aussi le parallélogramme,

$$Z^2 = I$$

en faisant passer simultanément de A en D et de B en C. On a donc aussi

$$XZ = ZX = Y$$

$$YZ = ZY = X$$

Les segments joignant deux points *quelconques* du parallélogramme définissent les translations d'un groupe G_4 qui conserve le parallélogramme.

On pourrait énoncer ce résultat sous une forme amusante en disant: en géométrie sur un corps de caractéristique $p = 2$ les diagonales d'un parallélogramme sont équipollentes et son centre est à l'infini (l'impossibilité de diviser par 2 entraîne d'ailleurs que le milieu d'un segment n'existe pas).

b) On peut définir un plan projectif sur un corps K comme l'ensemble des points qui ont trois coordonnées homogènes x, y, z dans K (non toutes nulles), avec comme groupe d'automorphismes le groupe linéaire.

Lorsque le corps K est de caractéristique $p = 2$, nous avons une géométrie projective dans laquelle il n'y a pas de division harmonique: la valeur $-1 = +1$ du birapport exprime en effet que les points ne sont pas distincts. Cette remarque incite à examiner les propriétés du quadrilatère complet.

Le repère projectif peut toujours être choisi de telle sorte que les côtés du quadrilatère soient

$$x = 0\,, \qquad y = 0\,, \qquad z = 0\,, \qquad x + y + z = 0$$

Dans ces conditions les trois couples des sommets opposés sont

(1, 0, 0) et (0, 1, 1) sur la diagonale $y = z$
(0, 1, 0) et (1, 0, 1) sur la diagonale $z = x$
(0, 0, 1) et (1, 1, 0) sur la diagonale $x = y$

et les trois diagonales sont concourantes au point unitaire (1, 1, 1).

En géométrie sur un corps de caractéristique deux, tout quadrilatère complet a ses diagonales concourantes.

Bien entendu, ce résultat est l'extension à la géométrie projective de celui obtenu en géométrie affine relativement au parallélogramme dont les diagonales sont parallèles. Cependant nous voyons apparaître ici une symétrie très remarquable: la figure comporte sept droites (quatre côtés et trois diagonales) et sept points (six sommets et le point de concours des diagonales) et chaque point appartient à trois des droites, pendant que chaque droite contient trois points de la figure. Cette symétrie de rôle de tous les éléments tient à ce qu'il s'agit de l'ensemble des points et des droites d'un plan projectif construits sur GF (2).

Lorsqu'un plan projectif est construit sur un corps [1]) *commutatif, s'il contient un quadrilatère complet dont les diagonales sont concourantes, il en*

---

1) Mais il existe des plans projectifs, non plongeables dans des espaces projectifs plus amples; ils ne peuvent pas être définis par des coordonnées prises dans un corps commutatif. Dans de tels plans, la réciproque que nous énonçons ici n'est pas vraie. cf. Pickert. Projective Ebene.

est de même pour tous les quadrilatères complets, et le corps de base est de caractéristique 2.

Il suffit, en effet, de choisir un repère associé au quadrilatère complet remarquable, de la même manière que ci-dessus: les trois diagonales ont alors pour équations

$$y + z = 0, \quad z + x = 0, \quad x + y = 0$$

système qui entraîne

$$x + x = 0, \quad y + y = 0, \quad z + z = 0$$

de sorte que l'existence du point de concours des diagonales équivaut à l'existence d'un élément non nul du corps de base qui vérifie

$$x + x = 0$$

et la caractéristique est bien $p = 2$.

En revenant à la géométrie affine du triangle de référence nous observons que sur un corps de caractéristique 2, les classiques théorèmes de Menelaus et de Jean de Ceva se confondent en un seul projectif: *la condition nécessaire et suffisante pour que trois droites issues des sommets d'un triangle soient concourantes, est que leurs pieds sur les côtés opposés soient alignés.*

Si l'on songe aux coniques inscrites dans un triangle qui, en géométrie projective classique ont leurs contacts caractérisés précisément par la propriété de concours précédent, on peut être étonné de ne rencontrer en caractéristique 2 que la seule famille des droites doubles, et de devoir conclure qu'*en géométrie sur un corps de caractéristique 2 il n'y a pas de coniques proprement dites inscrites à un triangle.*

c) Cette propriété paradoxale est liée aux vicissitudes de la théorie des formes quadratiques, qui sur un corps de caractéristique 2 ne vérifient pas le théorème de Gauss, de décomposition en carrés. Il est clair en effet que l'identité:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2$$

permet, quitte à introduire, quand cela est nécessaire, les racines carrées des coefficients, de réduire à un seul carré toute combinaison linéaire de carrés. Considérons donc dans le plan une conique

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + B'zx + B''xy = 0$$

lorsque B, B', B'' sont tous nuls, le premier membre étant le carré d'une forme linéaire, la conique se réduit à une droite double. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, nous introduirons comme en géométrie classique, l'application 1 néaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B''y + B'z \\ B''x + Bz \\ B'x + By \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B'' & B' \\ B'' & 0 & B \\ B' & B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

qui est intrinsèquement liée à la conique en vertu de l'invariance de la différentielle. La matrice symétrique, est de ce fait antisymétrique, donc irrégulière, et l'application admet un noyau non réduit à zéro. Ainsi s'introduit e point

$$N = \begin{pmatrix} B \\ B' \\ B'' \end{pmatrix}$$

projectivement lié à la conique, et que nous appellerons son « nucléon ».

En choisissant le repère de façon que le nucléon soit le point (0, 0, 1), nous obtenons une première équation réduite:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + B''xy = 0$$

Si le nucléon appartient à la conique, c'est-à-dire si $A'' = 0$, l'équation homogène en x, y représente deux droites (distinctes) issues de N.

Si le nucléon n'appartient pas à la conique, on peut choisir la droite double

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0$$

comme côté opposé à N dans le repère et le choix du point unitaire, arbitrairement, sur la conique donne l'équation réduite définitive

$$xy = z^2$$

On vérifie immédiatement sur cette équation que l'intersection de la conique avec la droite

$$ux + vy + wz = 0$$

est formée de deux points distincts si $w \neq 0$ et de deux points confondus si $w = 0$.

Une conique non décomposée a ses tangentes concourantes, au nucléon de la conique.

C'est pour cette raison qu'on ne trouve aucun triangle proprement dit, circonscrit à une conique.

Dans ces conditions, il est peut-être utile d'indiquer brièvement comment se présente la discussion des différents types de faisceaux linéaires de coniques. Dans le cas général, un faisceau de coniques ne contient aucune droite double. Il y a quatre points bases, qui, joints deux à deux, définissent six droites constituant les coniques décomposées du faisceau. Les nucléons des coniques décrivent la septième droite du plan projectif défini ainsi sur le corps des restes modulo 2.

Lorsque le nombre des points de base est réduit à trois ou à deux, l'un de ces points étant un contact bi ou tri-ponctuel, il n'y a pas de droite double dans le faisceau et les nucléons décrivent la tangente fixe.

Lorsque dans un faisceau il y a une droite double, les coniques du faisceau ont un nucléon fixe: si ce nucléon n'appartient pas à la droite double, il s'agit d'un faisceau de coniques bitangentes. Si le nucléon fixe appartient à la droite double, c'est l'unique point base, et les coniques ont en ce point un contact quadriponctuel.

Enfin, lorsque deux coniques d'un faisceau sont des droites doubles, le premier membre de l'équation est une combinaison linéaire de carrés, donc un carré, et toutes les coniques du faisceau sont les droites issues du point base, comptées doubles: *en géométrie sur un corps de caractéristique deux, il n'y a pas de faisceau involutif, mais des faisceaux de droites doubles.*

d) Nous allons maintenant nous intéresser à la division harmonique dans la géométrie sur un corps de caractéristique $p = 3$. La relation entre les coordonnées de quatre points alignés en division harmonique:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = -1$$

se transforme par un calcul facile en

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$$

qui montre qu'*en géométrie sur un corps de caractéristique trois les quatre points d'une division harmonique ne sont pas distingués en deux paires, mais jouent le même rôle.* C'est pourquoi nous l'appellerons une *division symétrique.* Deux points choisis arbitrairement dans la division sont conjugués par rapport aux deux points restants.

On peut éviter le calcul précédent en plaçant trois des points en ∞, 0, 1, en utilisant la triple transitivité du groupe projectif. Le conjugué de chaque point, par rapport aux deux autres est, successivement

$$\frac{1}{2}, \quad 2, \quad -1$$

et sur le corps des restes modulo 3, ces trois nombres sont égaux. Sous cette forme réduite, on peut dire: *en géométrie affine sur le corps des restes modulo 3 chacun des trois points d'une droite est le milieu des deux autres.*

Il résulte de cette symétrie que si, en géométrie projective plane sur un corps de caractéristique trois, nous associons à un quadrangle $ABCD$, de points diagonaux I, J, K, la conique sur laquelle les points A, B, C, D forment une division symétrique, nous obtenons une figure dans laquelle les propriétés classiques du quadrangle harmonique se retrouvent, symétrisées. Les tangentes a, b, c, d en A, B, C, D sont intrinsèquement déterminées par le birapport -1, sans qu'il soit nécessaire d'ordonner les points: a, AB, AC, AD forment un faisceau symétrique. Les trois diagonales du quadrilatère *abcd* sont, comme en géométrie classique, les côtés du triangle IJK: par I passent deux côtés du quadrangle $ABCD$ et deux diagonales du quadrilatère *abcd*, et ces quatre droites forment un faisceau symétrique.

En outre, l'intersection des côtés a, b du quadrilatère appartient à CD conjuguée de AB de même que l'intersection des côtés c, d appartient à AB conjuguée de CD, ces points étant, sur JK, conjugués par rapport à J et K. Cette propriété, symétrique, est valable pour tous les sommets du quadrilatère. *Le quadrilatère abcd est non seulement circonscrit au quadrangle ABCD* (chaque côté contenant le sommet de même nom) *mais il lui est en même temps inscrit*, en ce sens que les six sommets du quadrilatère appartiennent respectivement aux six côtés du quadrangle.

On peut donner de cette propriété une forme réduite affine, en plaçant JK à l'infini, et en disant: en géométrie affine sur un corps de caractéristique trois, la figure obtenue en joignant les milieux des côtés d'un parallélogramme est un parallélogramme et chacun est à la fois inscrit et circonscrit à l'autre.

La configuration projective ainsi associée à quatre points d'un plan comporte 13 points et 13 droites; elle est telle que toute droite contient quatre points en division symétrique et que par tout point passent quatre droites formant un faisceau symétrique: c'est un plan projectif construit sur le corps des restes modulo 3.

Cette propriété pourrait, comme précédemment, servir à caractériser la géométrie projective dont nous nous occupons.

e) Sans vouloir multiplier les exemples élémentaires nous remarquerons encore cette propriété de la droite projective sur le corps des restes modulo cinq: *les six points d'une telle droite projective forment trois couples deux à deux en division harmonique.*

En effet, en choisissant trois points quelconques de l'ensemble comme repère $(\infty, 0, 1)$ les autres ont pour coordonnées $2, -1, -2$: les deux couples $(\infty, 0)$ $(1, -1)$ et les deux couples $(\infty, 0)$ $(2, -2)$ sont évidemment harmoniques. Et le conjugué de 2 par rapport $(-1, 1)$ est

$$\frac{1}{2} = -2$$

nous ne nous appesantirons pas sur les propriétés de commutation liées à cette figure.

II. Propriétés hermitiennes

Nous avons rencontré dans l'étude des formes quadratiques en caractéristique deux, l'identité

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2$$

cette propriété s'étend à toute caractéristique finie, sous la forme

$$x^p + y^p = (x+y)^p$$

plus généralement

$$x^q + y^q = (x+y)^q$$

où $q = p^k$ est une puissance de p: liée au « petit » théorème de Fermat, elle tient à la divisibilité par p des coefficients binômiaux. Elle montre que dans un corps de caractéristique p, l'opération

$$x \to x^p$$

est un automorphisme, qui engendre un groupe.

De même que l'automorphisme du corps complexe

$$z = x + iy \to \bar{z} = x - iy$$

avait permis à Hermite de définir les formes, puis la géométrie qui porte son nom, de même, il est possible de définir, en caractéristique p, *les formes sesquilinéaires.*

Considérons un espace vectoriel, sur un corps de caractéristique p, et une forme $f(x, y)$ qui à un couple de vecteurs X, Y associe un nombre du corps de base, avec les propriétés suivantes: