II. Propriétés hermitiennes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

cinq: *les six points d'une telle droite projective forment trois couples deux à deux en division harmonique.*

En effet, en choisissant trois points quelconques de l'ensemble comme repère $(\infty, 0, 1)$ les autres ont pour coordonnées $2, -1, -2$: les deux couples $(\infty, 0)$ $(1, -1)$ et les deux couples $(\infty, 0)$ $(2, -2)$ sont évidemment harmoniques. Et le conjugué de 2 par rapport $(-1, 1)$ est

$$\frac{1}{2} = -2$$

nous ne nous appesantirons pas sur les propriétés de commutation liées à cette figure.

II. Propriétés hermitiennes

Nous avons rencontré dans l'étude des formes quadratiques en caractéristique deux, l'identité

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2$$

cette propriété s'étend à toute caractéristique finie, sous la forme

$$x^p + y^p = (x+y)^p$$

plus généralement

$$x^q + y^q = (x+y)^q$$

où $q = p^k$ est une puissance de p: liée au « petit » théorème de Fermat, elle tient à la divisibilité par p des coefficients binômiaux. Elle montre que dans un corps de caractéristique p, l'opération

$$x \to x^p$$

est un automorphisme, qui engendre un groupe.

De même que l'automorphisme du corps complexe

$$z = x + iy \to \bar{z} = x - iy$$

avait permis à Hermite de définir les formes, puis la géométrie qui porte son nom, de même, il est possible de définir, en caractéristique p, *les formes sesquilinéaires.*

Considérons un espace vectoriel, sur un corps de caractéristique p, et une forme $f(x, y)$ qui à un couple de vecteurs X, Y associe un nombre du corps de base, avec les propriétés suivantes:

a) la forme est linéaire par rapport à X:

$$f(\lambda X, Y) = \lambda f(X, Y)$$

$$f(X' + X'', Y) = f(X', Y) + f(X'', Y)$$

b) la forme est semilinéaire par rapport à Y:

$$f(X, \lambda Y) = \lambda^q f(X, Y)$$

$$f(X, Y' + Y'') = f(X, Y') + f(X, Y'')$$

Il est clair que lorsqu'on passe de l'espace vectoriel à l'espace projectif par la traditionnelle relation d'homogénéité, une telle forme, dite sesquilinéaire, possède, pour le couple de points correspondants, les propriétés d'une fonction caractéristique. En désignant toujours par X, Y les points correspondant aux deux vecteurs de mêmes noms, la relation

$$f(X, Y) = 0$$

est une propriété géométrique de l'espace projectif, que nous appellerons une *sesquipolarité.*

Pour en montrer brièvement les propriétés, je supposerai que l'espace vectoriel étant à trois dimensions, nous traitons de géométrie projective plane.

Lorsque le point $Y = A$ est donné, le lieu des points X qui lui correspondent

$$f(X, A) = 0$$

est une droite que nous appellerons la polaire de A. En faisant décrire à Y une droite

$$Y = A + tB$$

la polaire

$$f(X, A) + t^q f(X, B) = 0$$

décrit un faisceau linéaire de droites. Le birapport r de quatre points alignés est celui des t, le birapport des polaires est celui des t^q. Comme l'expression du birapport est rationnelle, et que l'élévation à la puissance q est un homomorphisme, le birapport des quatre polaires est r^q.

De même lorsque le point $X = A$ est donné, le lieu des points Y qui lui correspondent a pour équation

$$f(A, Y) = 0.$$

Sous réserve d'étendre éventuellement le corps de base (comme on le fait en géométrie réelle lorsqu'on introduit des éléments imaginaires conjugués), le premier membre est la puissance q-ème d'une forme linéaire: le lieu est une droite (multiple) que nous appellerons la semi-polaire de A. En faisant décrire à X une droite

$$X = A + tB$$

la semi-polaire

$$f(A, Y) + tf(B, Y) = 0$$

décrit un faisceau linéaire de droites, et en utilisant comme plus haut l'homomorphisme fondamental, on voit que le birapport de quatre semi-polaires est la racine q-ème du birapport r des quatre points correspondants.

Pour alléger cet exposé, nous nous limiterons au cas où la correspondance entre un point et sa polaire, est biunivoque. Nous voyons ainsi comment la notion de sesquipolarité généralise la notion classique de transformation par polaires réciproques, associée aux formes bilinéaires. Cette théorie classique est immédiatement liée à celle des formes quadratiques, et il s'introduit ici toute une série de courbes (et de variétés dans les espaces projectifs de dimension quelconque), lieu des points qui appartiennent à leur polaire, et par conséquent aussi à leur semi-polaire:

$$f(X, X) = 0$$

Ce sont ces courbes et variétés que, en accord avec M. Beniamino Segre, nous nommerons *variétés hermitiennes* [1]).

Le dédoublement de la polarité pose cependant la question de la recherche des couples point-droite pour lesquels il y a réciprocité, c'est-à-dire des points pour lesquels la polaire est en même temps la semi-polaire. Dans le cas régulier, auquel nous nous sommes limités, on obtient une configuration très simple: *les éléments pour lesquels il y a réciprocité sont les points et les droites d'un plan projectif sous-jacent au plan donné dans lequel les coordonnées sont prises dans le corps à* q^2 *éléments.*

Ce résultat est important car, de même qu'en géométrie classique des formes quadratiques, la recherche d'un repère conjugué est équivalente à la décomposition en carrés de Gauss, de même, ici, l'obtention d'un repère

---

[1]) Cf. L. Gauthier: *Géométrie hermitienne généralisée.* Bulletin Académie Royale de Belgique 1966, p. 421. Dans ce mémoire, ces variétés étaient désignées, pour une autre raison, sous le nom de variétés de Fermat. Cf. B. Segre: *Hermitian geometries, with special regard to the finite case.* Actas Coloquio Internacional Geometria Algebraica Madrid 1965.

conjugué (avec réciprocité) permet de définir une *forme réduite, de Fermat :*

$$x^{q+1} + y^{q+1} + z^{q+1} = 0$$

Pour donner un exemple simple d'étude de courbe hermitienne, prenons le cas $q = p = 3$. La quartique Q

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0$$

est coupée par toutes les droites du plan en des points formant des divisions symétriques, comme on le voit après avoir remarqué que

$$(x_0 + \lambda x_1)^4 = x^4{}_0 + \lambda x_0^3 x_1 + \lambda^3 x_0 x_1^3 + \lambda^4 x_1^4$$

ne contient pas de terme en λ^2. Pour cette raison, nous dirons que la quartique Q est *totalement symétrique.*

En particulier, si le point (x_0, y_0, z_0) appartient à Q, la tangente en ce point, définie, suivant l'habitude classique des géomètres algébristes, comme la droite exceptionnelle, pour laquelle $\lambda = 0$ est racine multiple de l'équation d'intersection, a pour équation:

$$x_0^3 X + y_0^3 Y + z_0^3 Z = 0$$

le premier membre est précisément la forme sesquilinéaire associée à l'équation de Q, et la *tangente est la polaire du point de contact.*

Cette remarque associée aux propriétés d'alignement montre que *quatre points alignés sur Q ont des tangentes concourantes suivant un faisceau symétrique.* Ces quatre tangentes recoupent d'ailleurs Q en quatre points alignés.

D'autre part, la racine $\lambda = 0$ est dans ce cas une racine au moins triple, le contact de la tangente avec la courbe est au moins triponctuel, et *la courbe Q est totalement inflexionnelle* c'est-à-dire que tous ses points sont d'inflexion.

Les points pour lesquels il y a réciprocité polaire sont ceux dont les coordonnées sont des entiers de Gauss: $a + bi$ (où a, b sont des restes modulo 3 et $i^2 = -1$). Il y a 91 tels points dont 28 sont sur la courbe Q, la tangente ayant alors un contact quadriponctuel, et il y en a 63 qui n'appartiennent pas à Q. Une étude approfondie de cette question et des fonctions modulaires en caractéristique trois [1]) rapproche ces deux nombres de la détermination des 28 bitangentes et des 63 familles de coniques quadritangentes, donnée par F. Klein dans son étude de la quartique canonique en géométrie complexe.

---

[1]) Cf. Luc Gauthier: *L'invariant modulaire dans la géométrie sur un corps de caractéristique trois.* Journal de mathématiques pures et appliquées 1957, p. 117.

La détermination de la tangente courante à la quartique totalement symétrique Q, associée à l'homomorphisme d'élévation au cube, montre que l'équation tangentielle de Q est

$$u^4 + v^4 + w^4 = 0$$

cette courbe est donc *autoduale*.

D'un point P quelconque du plan on mène quatre tangentes à Q, formant un faisceau symétrique: leurs contacts sont alignés sur la semipolaire de P. Lorsque P est sur la quartique Q, sa semipolaire passe par P et est tangente à Q en un point P': le faisceau est alors formé de PP' triple et de la tangente en P simple.

Comme la quartique Q ne comporte aucune singularité ponctuelle, elle est de genre 3. En géométrie projective complexe les quartiques de genre 3 sont de classe 12. Nous rencontrons ici, pour la seconde fois, le fait qu'en géométrie sur un corps de caractéristique p les propriétés tangentielles sont profondément différentes de celles de la géométrie complexe classique. Dans la théorie des coniques, pour $p = 2$ nous avons trouvé que l'enveloppe des tangentes n'est pas du tout la conique elle-même, mais le nucléon de la conique, qui est de classe 1. Dans la présente étude, en caractéristique $p = 3$, la quartique Q est bien l'enveloppe de ses tangentes, mais le point caractéristique d'une tangente:

$$X = u^3 \qquad Y = v^3 \qquad Z = w^3$$

n'est pas le point de contact, puisque

$$u = x_0^3 \qquad v = y_0^3 \qquad w = z_0^3$$

C'est le point déduit du point de contact par l'homomorphisme $x \to x^9$: c'est le tangentiel du point de contact.

Nous verrons plus loin comment peut être élaborée non seulement la géométrie tangentielle, mais toute la géométrie infinitésimale.

III. Quelques questions de géométrie algébrique

Pour rester fidèle au but que je me suis proposé, je me bornerai ici à indiquer quelques théorèmes classiques de la géométrie complexe qui perdent leur validité en géométrie sur un corps de caractéristique p.

Nous avons montré, comme conséquence de l'homomorphisme fondamental, qu'il n'y a pas, en géométrie sur un corps de caractéristique deux,