Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CARACTÉRISATION DE CERTAINES TOPOLOGIES COMPACTES

Autor: Lorch, E. R. / Tong, Hing

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43212

CARACTÉRISATION DE CERTAINES TOPOLOGIES COMPACTES

E. R. LORCH et HING TONG [1]

A la mémoire de J. Karamata

On suivra de près les notations et la terminologie données par l'un de nous dans [1]. Soit **E** un ensemble dont les points seront indiqués par $x, y, \ldots$. Soit τ une topologie compacte sur **E**. Il sera entendu que la topologie est séparée. On désigne par C_τ l'algèbre de toutes les fonctions continues sur **E** et à valeurs réelles. Pour spécifier la topologie, nous parlerons souvent de fonctions τ-continues, d'ensembles τ-ouverts, etc. On désigne par I_τ l'algèbre des fonctions réelles de Baire engendrées par C_τ. Soit maintenant T l'ensemble de toutes les topologies compactes τ' (sur **E** bien entendu) et telles que $I_{\tau'} = I_\tau$. Autrement dit, $T = \{\tau' : I_{\tau'} = I_\tau\}$. Etant donnée une topologie τ de T, toute autre topologie τ' de T sera appelée cohérente; plus exactement, la paire (τ, τ') sera une paire cohérente.

On introduit dans T une topologie, appelée *métatopologie*, de la manière suivante (pour les détails nous renvoyons le lecteur à [1]): soit $\tau \in T$ et soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions appartenant à C_τ. Alors, l'ensemble

$$U(\tau; f_1, \ldots, f_n) = \{\tau' : \tau' \in T \text{et} f_1, \ldots, f_n \in C_{\tau'}\}$$

définit un voisinage « typique » de τ dans la métatopologie. En effet, on obtient, en variant l'entier n et les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de toutes les manières possibles, une base de voisinages ouverts de τ dans la métatopologie.

La métatopologie n'est pas discrète en général. Donc, sauf pour des cas très particuliers (par exemple, si **E** est un ensemble fini), il n'est pas vrai que l'ensemble $\{\tau\}$ de T est ouvert pour chaque τ. Tout de même c'est un fait qui découle très facilement de théorèmes classiques que la métatopologie est discrète au point τ, donc que l'ensemble $\{\tau\}$ est ouvert, dans le cas suivant: supposons qu'il existe n fonctions τ-continues, $f_1, \ldots, f_n$, qui séparent les points de **E** (c'est-à-dire que $f_i(x) = f_i(y)$, $i = 1,, \ldots, n$, est impossible à moins que $x = y$). Soit τ' une topologie dans $U(\tau; f_1, \ldots, f_n)$. Alors

---

[1] Travail subventionné par la National Science Foundation, U.S.A.

puisque $f_1, \ldots, f_n \in C_{\tau'}$, la topologie faible engendrée par les f_i est moins fine que τ'. D'autre part cette topologie est identique à τ puisqu'elle est séparée. Donc $\tau \subset \tau'$, ce qui implique que $\tau = \tau'$. Nous avons $U(\tau; f_1, \ldots, f_n) = \{\tau\}$ et donc $\{\tau\}$ est ouvert.

Dans cette note nous allons démontrer une proposition réciproque à celle ci-dessus. Nous démontrons que si la métatopologie sur T est discrète au point τ, alors il existe n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ dans C_τ qui séparent les points de **E**. Autrement dit, nous montrons que si τ est une topologie compacte sur **E** pour laquelle il existe des fonctions τ-continues $g_1, \ldots, g_m$ telles que l'unique topologie pour laquelle les g_i sont continues est τ, alors il existe des fonctions τ-continues $f_1, \ldots, f_n$ qui séparent les points de **E**. Nous verrons en effet qu'avec une simple adjonction, les fonctions $g_1, \ldots, g_m$ séparent les points de **E**.

Nous énonçons ci-dessous trois propositions équivalentes. La plupart des implications sont connues. C'est seulement 3)$\Rightarrow$1) qui demandera notre attention.

THÉORÈME: *Soit τ une topologie compacte sur* **E** *et soit* T *l'ensemble de toutes les topologies compactes sur* **E** *ayant les mêmes fonctions de Baire réelles que τ. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe* n *fonctions réelles τ-continues* $f_1, \ldots, f_n$ *qui séparent les points de* **E** *(c'est-à-dire, telles que* $f_i(x) = f_i(y)$, $i = 1, \ldots, n$ *implique* $x = y$).
2) *L'espace topologique* $(\mathbf{E}, \tau)$ *est homéomorphe à un sous-espace compact de* $\mathbf{R}^n$.
3) *La métatopologie sur* T *est discrète au point τ.*

Démonstration: 1)$\Rightarrow$2). Supposons que $f_1, \ldots f_n$ séparent les points de **E**. Soit Φ: $\mathbf{E} \to \mathbf{R}^n$ l'application définie par $\Phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Il est facile de voir que Φ est continue et bijective et que l'image de **E** par Φ, c'est-à-dire $\Phi(\mathbf{E})$, est un ensemble compact de $\mathbf{R}^n$. Donc Φ est un homéomorphisme.

2)$\Rightarrow$3). Soit Ψ une application homéomorphe de **E** dans $\mathbf{R}^n$, Ψ: $\mathbf{E} \to \mathbf{R}^n$. Si $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est un point de $\mathbf{R}^n$, soit p_i la projection p_i: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par $p_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_i$. Soit $f_i = p_i \circ \Psi$, $i = 1, \ldots, n$. Alors les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont τ-continues et séparent les points de **E**. Donc on a démontré 2)$\Rightarrow$1). La démonstration que 1)$\Rightarrow$3) a été donnée dans un des paragraphes précédant l'énoncé du théorème.

Il reste à démontrer que 3)$\Rightarrow$1). Soit donc la métatopologie sur T discrète au point τ. Ceci veut dire que chaque base au point τ de la métatopologie contient l'ensemble $\{\tau\}$. Il existe donc des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ qui sont τ-continues et telles que $U(\tau; f_1, \ldots, f_n) = \{\tau\}$. Supposons que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ ne séparent pas les points de **E**. Il existe donc deux points $x_1, y_1 \in \mathbf{E}$, $x_1 \neq y_1$, tels que $f_i(x_1) = f_i(y_1)$, $i = 1, \ldots, n$. Soit **A** l'ensemble de tous les points $z \in \mathbf{E}$ tels que $f_i(x_1) = f_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$. Nous avons $\mathbf{A} = \Phi^{-1}(\Phi(x_1))$ où Φ est l'application donnée par $\Phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Puisque Φ est une application continue, **A** est un ensemble τ-fermé. Démontrons premièrement la

PROPOSITION: *L'ensemble* **A** *est un ensemble fini et la topologie* τ *est discrète en chaque point* $z \in \mathbf{A}$.

Supposons que **A** soit infini. Puisque **A** est compact, il existe un point x^* qui est un point d'accumulation de **A**. Soit x_0 un autre point de **A**. Il existe une fonction g: $\mathbf{E} \to \mathbf{R}$, τ-continue, telle que $g(x^*) = 0$, $g(x_0) = 1$. Un ensemble constitué des zéros d'une fonction continue sera appelé un *zéro-ensemble* (zeroset). Il est à noter qu'un zéroensemble est un ensemble de Baire; un ensemble fermé ne l'est pas en général. Il existe donc deux τ-zéroensembles **A** et $\mathbf{A}_0$, pour lesquels $x^* \in \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}$, $x_0 \in \mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}_0 \cap \mathbf{A}^* = \varnothing$; de plus le point x^* est un point d'accumulation de $\mathbf{A}^*$. On notera que **A** est un τ-zéroensemble et que l'intersection finie de zéroensembles est un zéroensemble.

Nous construisons maintenant une succession de τ-zéroensembles: $\overset{*}{\mathbf{A}}_1 \supsetneqq \overset{*}{\mathbf{A}}_2 \supsetneqq \ldots$ tels que $x^* \in \mathbf{A}_l \subsetneqq \mathbf{A}^*$ et nous choisissons $\overset{*}{x}_l \in \overset{*}{\mathbf{A}}_l - \overset{*}{\mathbf{A}}_{l+1}$, $l = 1, 2, \ldots$. Soit $\mathbf{B} = \bigcap_{l=1}^{\infty} \overset{*}{\mathbf{A}}_l$. Il est clair que **B** est un τ-zéroensemble, donc un ensemble fermé de type G_δ. De plus, **B** contient chaque point d'accumulation de l'ensemble $\{\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots\}$. Nous avons aussi $x_0 \in \mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}$ et $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_0 = \varnothing$.

Considérons l'ensemble $\mathbf{F} = \mathbf{E} - (\mathbf{A}_0 \cup \mathbf{B})$ comme sous-espace de $(\mathbf{E}, \tau)$. **F** est localement compact et peut être compactifié selon la manière classique par l'adjonction d'un point x_∞. De plus, puisque **B** n'est pas un ensemble ouvert, **F** n'est certainement pas compact et donc dans la compactification $\mathbf{F} \cup \{x_\infty\}$ le point x_∞ est un point d'accumulation. Nous construisons maintenant une nouvelle topologie τ' sur **E** de la manière suivante. Considérons $\mathbf{A}_0$ et **B** comme sous-espaces de $(\mathbf{E}, \tau)$. Formons l'union libre des trois espaces $\mathbf{F} \cup \{x_\infty\}$, $\mathbf{A}_0$, et **B**. Dans cette union libre, identifions les points x_0 et x_∞. Ceci sera l'espace $(\mathbf{E}, \tau')$.

La topologie τ' est compacte. De plus, la topologie τ' est cohérente. Pour s'en assurer, il suffit de montrer que chaque fonction g qui est τ-continue est ou bien τ'-continue ou de la première classe de Baire pour τ'; et réciproquement. La démonstration de ce fait s'appuie sur le théorème de Tietze qui permet l'extension continue à tout un espace d'une fonction continue sur un sous-espace fermé; elle s'appuie aussi sur le fait que $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{B}$ étant des ensembles de type G_δ dans $(\mathbf{E}, \tau)$ et aussi dans $(\mathbf{E}, \tau')$, l'ensemble $\mathbf{F}$ est de type $\mathfrak{F}_\sigma$ et donc peut être représenté comme une succession d'ensembles fermés. Nous laissons au lecteur les détails de la démonstration de la cohérence.

De plus, les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont τ'-continues. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le comportement de ces fonctions dans le voisinage de x_0. Or l'ensemble $\{x\colon |f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon\}$ est un τ'-voisinage de x_0 puisque l'ensemble complémentaire est un sous-ensemble de $\mathbf{F}$ qui est τ-compact. Ceci démontre donc que f_i est τ'-continue au point x_0.

Finalement, les topologies τ et τ' ne sont pas les mêmes. Car il existe des τ-voisinages de x_0 qui ne contiennent aucun des points de l'ensemble $\{x_1^*, x_2^*, \ldots\}$. Mais dans la compactification de $\mathbf{F}$, chaque voisinage de x_∞ contient des points de cette suite. Notre hypothèse faite au début de la démonstration que l'ensemble $\mathbf{A}$ est infini est donc fausse. Ceci démontre la première moitié de la proposition.

Considérons un point x de $\mathbf{A}$. Puisque $\mathbf{A}$ est un ensemble fini, il existe un τ-voisinage de x qui exclut tout autre point de $\mathbf{A}$. En outre $\mathbf{A}$ est un ensemble de type G_δ puisqu'il est un zéroensemble. Il s'ensuit que $\{x\}$ est un ensemble de type G_δ pour la topologie τ. Maintenant supposons que $\{x\}$ ne soit pas τ-ouvert. Si $y \in \mathbf{A}$, $y \neq x$, nous construisons une nouvelle topologie τ' cohérente à τ en « échangeant » les points x et y. Ceci veut dire qu'un τ'-voisinage de x sera de la forme $(\mathbf{U}-\{y\})\cup\{x\}$ où $\mathbf{U}$ est un τ-voisinage de y; et réciproquement. Il est facile de voir que τ' est cohérente (puisque les ensembles $\{x\}$ et $\{y\}$ sont de type G_δ pour τ) et aussi que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont τ'-continues. De plus τ' n'est pas identique à τ puisque x est un point d'accumulation de τ et puisque τ est séparée. Ceci contredit notre hypothèse. Il s'ensuit que τ est discrète en tout point de $\mathbf{A}$. Ceci termine la démonstration de la proposition.

Soit Φ la transformation de $\mathbf{E}$ en $\mathbf{R}^n$ donnée auparavant. Soit $\mathbf{A}$ un ensemble de la sorte envisagée dans la proposition. C'est-à-dire, $\mathbf{A} = \Phi^{-1}(\Phi(x))$ pour un x donné et $\mathbf{A}$ possède au moins deux éléments. Soit $\mathbf{C}$ la réunion de tous les ensembles $\mathbf{A}$, $\mathbf{C} = \cup\, \mathbf{A}$. Alors, puisque $\mathbf{A}$ est un ensemble τ-ouvert (selon la proposition), il en est de même de $\mathbf{C}$. Donc l'ensemble $\mathbf{D} = \mathbf{E}-\mathbf{C}$ est τ-fermé. Nous verrons dans la suite que $\mathbf{D}$ est un ensemble de type G_δ, donc un τ-zéroensemble.

Notons premièrement que $\Phi^{-1}\,\Phi(\mathbf{D})=\mathbf{D}$ par définition. Puis, puisque $\mathbf{D}$ est τ-fermé et que Φ est continue, $\Phi(\mathbf{D})$ est fermé dans $\Phi(\mathbf{E})$. Puisque $\Phi(\mathbf{E})$ est un espace métrique, il existe des ensembles ouverts $\mathbf{O}_i\subset\Phi(\mathbf{E})$, $i=1,2,\ldots$, tels que $\Phi(\mathbf{D})=\bigcap_1^\infty \mathbf{O}_i$. Donc $\mathbf{D}=\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{D}))=\Phi^{-1}(\bigcap_1^\infty \mathbf{O}_i)=$ $=\bigcap_1^\infty \Phi^{-1}(\mathbf{O}_i)$. Puisque $\Phi^{-1}(\mathbf{O}_i)$ est ouvert, $\mathbf{D}$ est de type G_δ.

Soit f une fonction τ-continue à valeurs réelles telle que $f(x)=0$ pour $x\in\mathbf{D}$, $f(z)>0$ pour $z\in\mathbf{C}$. On construira une fonction f_0, τ-continue de la manière suivante. Soit $\mathbf{A}=\{z_1,\ldots,z_r\}$ un ensemble fini de la forme $\mathbf{A}=\Phi^{-1}(\Phi(x))$, $x\in\mathbf{E}$, et $r>1$. Supposons pour faciliter les notations que $f(z_r)=\min\{f(z_1),\ldots,f(z_r)\}$. Définissons alors $f_0(z_k)=(k/r)f(z_r)$, $k=1,\ldots,r$. La fonction f_0 est ainsi définie pour chaque $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{C}$. Pour x dans $\mathbf{D}$, posons $f_0(x)=0$. La fonction f_0 est τ-continue. Ceci est évident si $x\in\mathbf{C}$ puisque τ est discrète au point x. Si $x\in\mathbf{D}$, la continuité découle du fait que $0\leqq f_0\leqq f$ et de la continuité de f.

Considérons finalement les fonctions $f_0,f_1,\ldots,f_n$. Il est évident qu'elles séparent les points de $\mathbf{E}$ puisque f_0 sépare les points de chaque $\mathbf{A}$. Ceci complète la démonstration du théorème.

Nous ajoutons quelques observations. Si la métatopologie est discrète au point τ, il s'ensuit de théorèmes classiques que si $\mathbf{E}$ n'est pas un ensemble fini ou dénombrable, $\mathbf{E}$ a la puissance du continu. Si pour une topologie compacte τ et n fonctions τ-continues $f_1,\ldots,f_n$ la seule topologie (cohérente ou non) pour laquelle les f_i sont continues est τ, alors évidemment $(\mathbf{E},\tau)$ est homéomorphe à un ensemble compact de $\mathbf{R}^n$. Finalement, le théorème démontré ci-dessus est en rapport avec la structure du groupe $\mathfrak{G}$ des équivalences de Baire appartenant aux topologies de T dans le cas des espaces métriques. Dans [1] il a été introduit pour chaque $\tau\in T$ une topologie uniforme ${}_\tau\mathfrak{G}$ dans le groupe $\mathfrak{G}$. En s'appuyant sur la proposition 4.1 de [1] nous avons le corollaire suivant: *Pour que la topologie* ${}_\tau\mathfrak{G}$ *soit discrète, il faut et il suffit que la métatopologie sur* T *soit discrète au point* τ.

Le résultat de ce travail a été annoncé dans les *Rendiconti de l'Accademia dei Lincei*, le 31 juillet 1968.

[1] Lorch, E. R., On compact metric spaces and the group of Baire equivalences, *Studia Mathematica*, T. XXXI (1968), 243-252.

(Reçu le 1er septembre 1968)

E. R. Lorch, Columbia University.

Hing Tong, Fordham University, New York, N.Y.

vide-leer-empty