II. Une fonction de classe C^∞ localement polynomiale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

En particulier, $F^{gg} \cap F^{gd}$ et $F^{dd} \cap F^{dg}$ sont d'aires nulles, et il en est de même pour leurs transformées par les affinités horizontales de rapport 4 appliquant respectivement F^{gg} et F^{dd} sur F.

Il suit de là que la partie de F située au-dessous de la droite $y = \frac{1}{4}$ est d'aire nulle. Pour presque tout μ dans $[0, \frac{1}{4}]$, l'ensemble $(1-\mu) E + \frac{1}{2} \mu E$ est donc de mesure nulle. Autrement dit, pour presque tout λ dans $[0, \frac{1}{6}]$, $E + \lambda E$ est de mesure nulle. Or, pour tout $\lambda > 0$ et tout entier $n > 0$, $E + \lambda E$ est la réunion de 2^n ensembles translatés de $E + \lambda 4^{-n} E$. Donc $E + \lambda E$ est de mesure nulle pour presque tout λ positif, ce qui démontre les propositions 2) et 4).

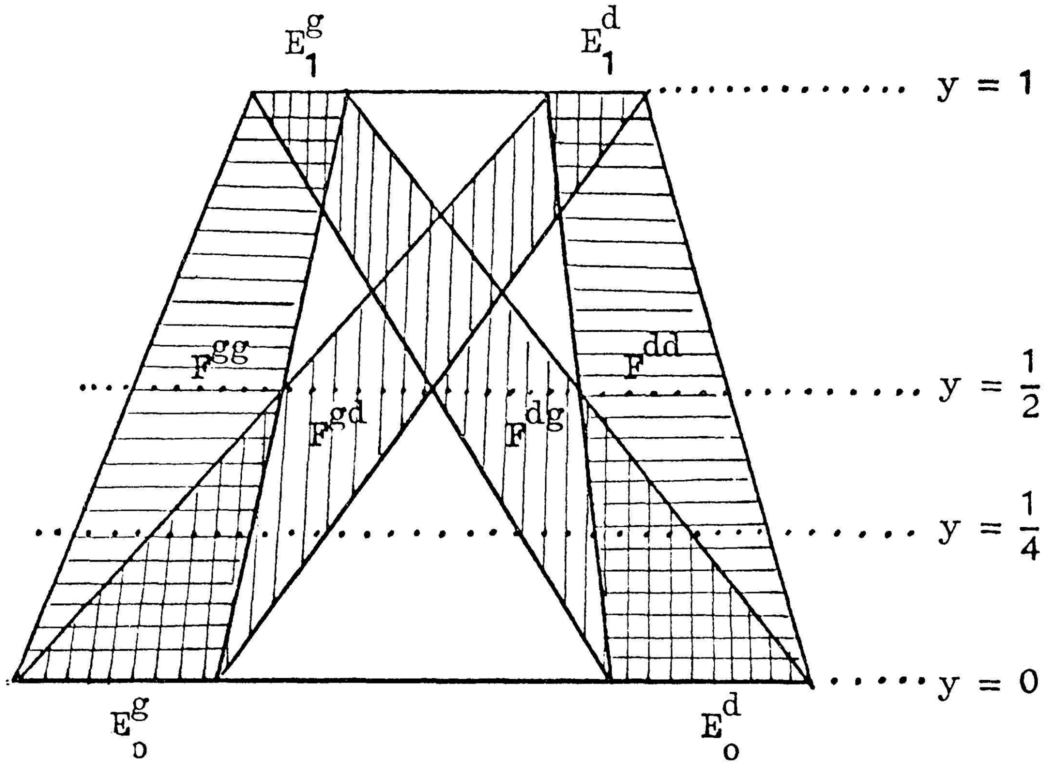

Figure 1

II. Une fonction de classe C^∞ localement polynomiale

Mandelbrojt a indiqué un procédé de construction de fonctions de classe C^∞ à support compact, par régularisations successives (cf. [4]). Nous allons constater que cette construction fournit une fonction localement polynomiale sur le complémentaire d'un ensemble parfait symétrique donné. On obtient ainsi sans peine des fonctions de classe C^∞ et localement polynomiales en dehors d'un ensemble parfait arbitrairement fin; une construction, moins simple, a été donnée par Donoghue [2].

Soit r_n une suite positive sommable ($\sum_1^\infty r_n = b_0 < \infty$). Notons φ_n la fonction paire égale à $\frac{1}{2r_n}$ sur $[0, r_n]$, et nulle sur $[r_n, \infty]$. Soit f_n la convolution $\varphi_1 * \varphi_2 * \ldots * \varphi_n$. On vérifie que f_n converge uniformément vers une fonction f de classe C^∞ et de support $[-b_0, b_0]$ quand $n \to \infty$ [4].

Posons $b_n = r_{n+1} + r_{n+2} + \ldots$ et supposons maintenant $r_n > b_n$ ($n=1, 2, \ldots$). L'ensemble des points $\sum_1^\infty \varepsilon_n r_n$ ($\varepsilon_n = \pm 1$) est un ensemble parfait symétrique que nous noterons E. A une translation près, tout ensemble parfait symétrique est de cette forme, pour un choix convenable de la suite r_n. Pour construire E, on peut procéder par étapes: on part du segment $[-b_0, b_0]$ (blanc) et on ôte en son centre un intervalle $[-r_1+b_1, r_1-b_1]$ (noir); il reste deux segments blancs $[\varepsilon_1 r_1 - b_1, \varepsilon_1 r_1 + b_1]$, et on répète l'opération, de sorte qu'à la n-ième étape l'ensemble restant, E_n, soit la réunion des 2^n segments blancs $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \ldots + \varepsilon_n r_n - b_n, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + + \ldots + \varepsilon_n r_n + b_n]$. E est l'intersection des E_n. L'ensemble $E_n \setminus E_{n+1}$ est l'ensemble noirci à la n-ième étape.

Observons que si f_n est un polynome de degré p sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur $> 2r_{n+1}$, il en est de même de $f_{n+1} = f_n * \varphi_{n+1}$ sur l'intervalle $[\alpha + r_{n+1}, \beta - r_{n+1}]$. Donc, si f_n est un polynome de degré p sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur $> 2b_n$, il en est de même de f sur l'intervalle $[\alpha + b_n, \beta - b_n]$. Or f_1 est constant sur l'intervalle $[-r_1, r_1]$, f_2 est linéaire sur chacun des segments $[\varepsilon_1 r_1 - r_2, \varepsilon_1 r_1 + r_2]$, f_3 est parabolique sur chacun des segments $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 - r_3, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + r_3]$ et ainsi de suite. Il s'ensuit que sur $E_n \setminus E_{n+1}$ (réunion des intervalles noircis à la n-ième étape) f est localement un polynome de degré $n-1$. Donc f est localement polynomiale en dehors de E.

III. Une mesure singulière et presque lisse

Zygmund a appelé fonctions lisses les fonctions f telles que

$$\omega_2(f, t) = \sup_x \sup_{|h| \leq t} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| = o(t) \qquad (t \to 0).$$

Il a aussi introduit la classe $\Lambda*$ des fonctions f pour lesquelles

$$\omega_2(f, t) = 0(t) \qquad (t \to 0);$$