Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES NOMBRES PREMIERS

Autor: Kogbetliantz, Ervand G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43218

QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES NOMBRES PREMIERS

Ervand G. Kogbetliantz

A la mémoire de J. Karamata

La structure de l'ensemble de nombres premiers est si peu étudiée qu'à l'exception des paires de Goldbach $(p, p+2)$ on ne connaît aucun autre groupement naturel de nombres premiers caractérisé par une propriété commune. Or, malgré l'absence apparente d'ordre dans la diversité de nombres premiers, on peut trouver dans leur ensemble certaines suites partielles dont les termes accusent clairement une propriété commune. On y arrive en considérant les nombres premiers réels dans leur relation aux nombres premiers complexes de Gauss $a+bi$, où les deux entiers de parité différente a et b sont tels que a^2+b^2 est un nombre premier $4N+1$. Si $a+bi$ est un produit $(c+di)(m+ni)$, $a^2+b^2 = (c^2+d^2)\,(m^2+n^2)$ n'est pas premier et, d'un autre côté, il est bien connu que tout nombre premier réel du type $4N+1$ est une somme de deux carrés. Par conséquent, les nombres premiers réels du type $4N+1$ ne sont pas premiers dans l'anneau des entiers de Gauss. Cela nous oblige déjà à distinguer *deux* suites de Goldbach

$$(3\text{-}5),\ (11\text{-}13),\ (59\text{-}61),\ (71\text{-}73),\ \ldots\ (p = 4n+3, p+2),\ \ldots \tag{1}$$

$$(5\text{-}7),\ (17\text{-}19),\ (29\text{-}31),\ (41\text{-}43),\ \ldots\ (p = 4n+1, p+2),\ \ldots \tag{2}$$

séparant ainsi le problème de Goldbach pour la suite (1) de celui pour la suite (2). On va voir d'ailleurs que chacune de ces deux suites se décompose en suites partielles caractérisées par une propriété commune à ses termes, ce qui semble indiquer que le problème de Goldbach est beaucoup plus compliqué qu'il ne paraît.

En considérant les nombres premiers complexes il importe d'observer qu'avec $a+bi$ sont premiers aussi sept nombres $\pm a \pm bi$ et $\pm b \pm ai$. Par conséquent il suffit de les déterminer dans la moitié $0 \leqq b < a$ du premier quadrant. Sur la bissectrice $a = b$ il n'y en a qu'un seul $1+i$.

Si on marque les points (a, b) du plan complexe qui correspondent aux nombres premiers complexes $a+bi$, $0 \leqq b < a$, on constate que certaines configurations formées par ces points se répètent, définissant ainsi les familles de multiplets caractérisées chacune par sa configuration typique. On obtient ainsi une classification partielle de nombres premiers complexes et réels, mettant un certain ordre dans la diversité presque chaotique de la totalité des nombres premiers.

Il semble qu'à cette classification doivent correspondre certaines propriétés essentielles encore inconnues et qui expliqueraient la répartition de nombres premiers en familles différentes. Dans cet article nous nous limitons à la description de cette répartition.

Paires de Goldbach. Certaines paires $(p, p+2)$ de nombres premiers réels appartiennent aux carrés $(p+1 \pm 1, p+1 \pm i)$ de nombres premiers. Telles sont par exemples les suites

$$(4 \pm 1, 4 \pm i) \text{ et } (60m \pm 1, 60m \pm i), \text{ où } m = 3, 4, 7, 22 \text{ etc.} \tag{3}$$

$$(6 \pm 1, 6 \pm i) \text{ et } (60n+30 \pm 1, 60n+30 \pm i), \text{ où } n = 2, 4, 9, 21 \text{ etc.} \tag{4}$$

A notre avis, dans toute recherche concernant les suites de Goldbach (1) et (2) les suites partielles

$$(3\text{-}5), (179\text{-}181), (239\text{-}241), (419\text{-}421), (1319\text{-}1321), \ldots \text{ etc.} \tag{3*}$$

$$(5\text{-}7), (149\text{-}151), (269\text{-}271), (569\text{-}571), (1289\text{-}1291), \ldots \text{ etc.} \tag{4*}$$

extraites de (3) et (4) devraient être considérées indépendamment de (1) et (2). Pour justifier la formule $4N-1 = p = 60m-1$ dans (3) nous observons que $4N \pm 1 \not\equiv 0$ mod. 3 donne $N = 3k$, tandis que $4N \pm 1 \not\equiv 0$ mod. 5 $\Rightarrow$ $\Rightarrow N \not\equiv \pm 1$ mod. 5. Mais $16N^2+1 \not\equiv 0$ mod. 5 $\Rightarrow N \not\equiv \pm 2$ mod. 5, c'est-à-dire on a $N = 5j$. Vu que $N = 3k$, on obtient $4N = 60m$. — De même pour la formule $4N+1 = p = 60n+30-1$ dans (4): $p, p+2 \not\equiv 0$ mod. 3 $\Rightarrow$ $\Rightarrow N = 3k+1$, tandis que $p, p+2 \not\equiv 0$ mod. 5 $\Rightarrow N \not\equiv 1,3$ mod. 5. Mais $16N^2+16N+5 \not\equiv 0$ mod. 5 prouve que $N \not\equiv 0, -1$ mod. 5. Ainsi $N = 5j+2 = 3k+1$ gives $N = 15\,n+7$.

Dans le plan complexe on trouve d'autres carrés formés par quatre nombres premiers complexes $[a \pm 1+bi,\ a+(b \pm 1)\, i]$, $b>0$, par exemple ceux de centre $a+bi = 25+5i$ ou bien $a+bi = 5k\,(1+i)$ avec $k = 1, 5, 6, 7, 17, 20$ etc. Les coordonnées a et b du centre d'un tel carré satisfont aux deux conditions symétriques: $s_1 = (a \pm 1)^2+b^2$ et $s_2 = a^2+(b \pm 1)^2$ doivent être premiers. On en déduit les conditions nécessaires (mais insuffisantes) $a = 5m$, $b = 5n$, où m et n sont de même parité. En effet, si $a^2 \equiv 1$ mod. 5, $s_2 \not\equiv 0$ entraîne $b \pm 1 \not\equiv \pm 2$ et $b = 5n$. Mais alors $s_1 \not\equiv 0$ mod. 5 $\Rightarrow a \not\equiv \pm 1$. Par conséquent $a^2 \not\equiv 1$ mod. 5. Si $a^2 \equiv -1$ mod.5,

$s_2 \not\equiv 0 \Rightarrow b \pm 1 \not\equiv \pm 1$, $b \not\equiv 0, \pm 2$ et $b^2 \equiv 1$ ce qui est incompatible avec $a \equiv \pm 2$ mod. 5 parce que $s_1 = 9+1 \equiv 0$ mod. 5. Il ne reste que $a^2 \equiv 0$ mod. 5 donc $a = 5m$ et, par symétrie, $b = 5n$ aussi.

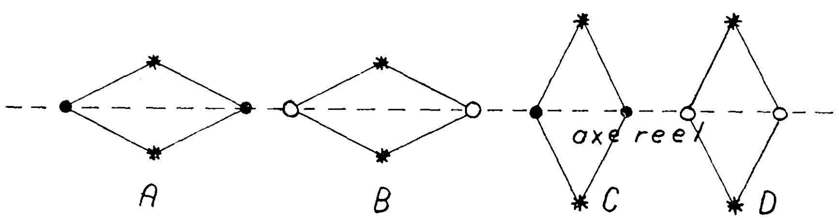
D'autres paires de Goldbach forment avec deux nombres premiers complexes des losanges $(a \pm 1, a \pm 5i)$, où $a = 60m \pm 12$ pour les paires du type $4N-1$, $4N+1$ tandis que pour celles $4N+1$, $4N+3$ on a $a = 60m \pm 18$. On obtient ainsi les deux suites suivantes

(3-5), (71-73), (107-109), (227-229). (311-313), (431-433). ... etc. (3**)

(5-7), (17-19), (41-43), (137-139), (197-199), (281-283), (617-619) . . . etc. (4**)

Naturellement, les mêmes losanges $(c \pm 1, c \pm 5i)$, où c est un nombre complexe, se retrouvent aussi au-dessus de l'axe réel; par exemple $c = 28+10i$, $35+29i$, $53+25i$, $62+50i$, $65+29i$ etc.

Losanges. Il ne peut y avoir des losanges $(p, p+2, p+1 \pm 3i)$, où p et $p+2$ sont premiers réels, mais on trouve en abondance des losanges $(c \pm 1, c \pm 3i)$ avec c complexe: $c = 58+50i$, $71+47i$, $41+23i$, etc. Il faut dire que dans le plan complexe à toute configuration C caractérisant une famille de multiplets correspondent des configurations identiques obtenues de C par rotations de $\pm 90°$ ou de $180°$. Ainsi, aux losanges cités $(c \pm 1, c \pm 3i)$ s'associent ceux $(d \pm 3, d \pm i)$, où par exemple $d = 82+36i$, $67+19i$, etc. Certaines paires p, $p+4$ et p, $p+8$ de premiers réels appartiennent aux losanges formés par quatre nombres premiers. Ainsi, on trouve quatre familles $A(a \pm 4, a \pm 2i)$, $B\,(b \pm 4, b \pm 2i)$, $C\,(a \pm 2, a \pm 4i)$ et $D\,(b \pm 2, b \pm 4i)$, où $a \pm 2$ et $a \pm 4$ sont premiers réels du type $4N+3$, tandis que $b \pm 2$ et $b \pm 4$ dénotent ceux du type $4N+1$. Dans la figure 1 les étoiles *



représentent les premiers complexes, les cercles pleins – les premiers réels $4N+3$ et les anneaux – ceux $4N+1$. Les premiers termes p de la suite des paires p, $p+8$ du type A (3-11), (11-19), ... sont:

3, 11, 23, 71, 131, 263, 431, 479, 491, ...etc. (5-A)

Ceux des paires du type B, C et D sont:

29, 53, 173, 449, 569, ... etc. (5-B)

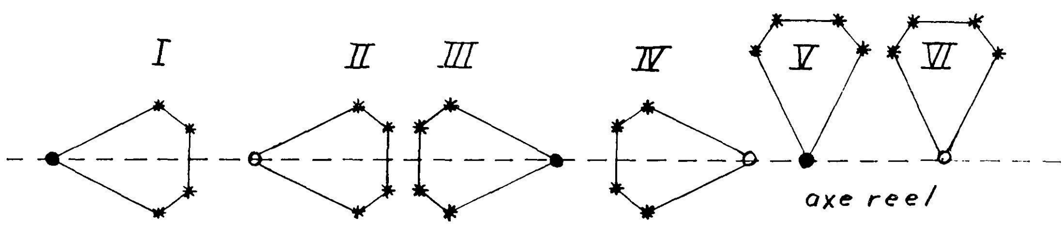
3, 7, 19, 79, 127, 163, 379, 487, 739, 859, 1303, ... etc. (5-C)

13, 97, 229, 313, 349, 613, 769, 853, 877, 1009, ... etc. (5-D)

Si l'on veut continuer ces suites (5) on peut essayer les formules $p_A = 60m+[-1$ ou 11 ou $23]$, $p_B = p_A+30$, $p_C = 60m+[7$ ou 19 ou $43]$, $p_D = p_C+30$ pour 5-A, B, C, D respectivement.

Carrés. A côté des carrés basés sur les paires de Goldbach on trouve des paires p, $p+D$ des deux premiers réels appartenant aussi aux carrés de diagonale $D = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ telles que par exemple (3-7), (43-47) ou bien (13-17), (613-617) si $D = 4$; (7-13), (67-73), (107-113), (167-173) et (5-11), (37-43), (97-103), (157-163), (677-683) si $D = 6$; (271-281), (307-317), (439-449), (499-509), (547-557), (643-653) si $D = 10$ etc.

Pentagones. On distingue six familles de pentagones identiques. Ces six familles diffèrent soit par l'orientation de leurs pentagones, soit par la nature ($4N+1$ ou $4N+3$) du sommet qui correspond au nombre premier réel, les autres quatre sommets marquant les nombres premiers complexes:



Ce sont: I) $[p = 4N+3;\ p+4\pm 2i,\ p+5\pm i]$, II) $[p = 4N+1;\ p+4\pm 2i,\ p+5\pm i]$; III) $[p = 4N+3;\ p-4\pm 2i,\ p-5\pm i]$; IV) $[p = 4N+1;\ p-4\pm 2i,\ p-5\pm i]$; V) $[p = 4N+3;\ p\pm 2+4i,\ p\pm 1+5i]$; VI) $[p = 4N+1;\ p\pm 2+4i,\ p\pm 1+5i]$. Voici les premiers termes des six suites correspondantes de nombres premiers réels:

11, 31, 151, 179, 199, 251, 431, 491, 1031, ... (6-I)

61, 709, 941, ... (6-II)

7, 11, 19, 31, 71, 139, 151, 211, 311, 479, 971, ... (6-III)

41, 89, 181, 269, 389, ... (6-IV)

$$7, 23, 367, \ldots \tag{6-V}$$

$$97, 313, \ldots \tag{6-VI}$$

Il est évident qu'avant de commencer l'étude de ces groupements naturels de nombres premiers réels il faudrait déterminer beaucoup plus de termes pour chacune de ces suites partielles de nombres premiers. Il est possible de calculer à l'aide d'un ordinateur tous les nombres premiers complexes de module inférieur à 3160 car on connaît tous les nombres premiers réels inférieurs à 10^7. Après avoir marqué ces nombres premiers $a+bi$, $0 \leqq b < a$, $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} < 3160$, on pourrait s'attaquer même au problème plus général concernant la distribution dans le plan complexe des multiplets identiques formés par les points représentant les nombres premiers complexes.

Pour continuer les suites (6) on peut essayer les formules $p_I = p_{III} = 60m+$ (11 ou 19 ou 31 ou 59); $p_V = 60m+$ (1 ou 29 ou 41 ou 49), ainsi que $p_{II} = p_{IV} = p_I+30$ et $p_{VI} = p_V+30$. Ces relations s'expliquent par le fait qu'en général un nombre premier réel du type $4N+3$ est toujours un terme de l'une des huit progressions arithmétiques $60m+r$, oú $r = 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59$ tandis qu'un nombre premier $4N+1$ est un terme de l'une des huit progressions $60m+s$, où $s = r+30$.

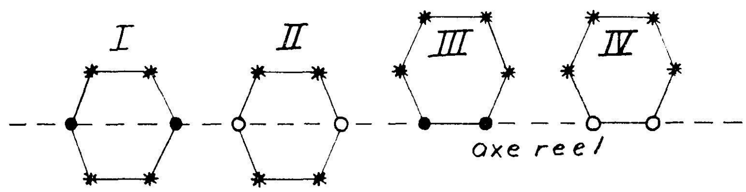
Aux pentagones I-VI formés par cinq nombres premiers complexes s'ajoutent dans le plan complexe les pentagones $[a+bi, a \pm 1+(b-5)i, a \pm 2 +(b-4)i]$, $b > 0$, ainsi que ceux obtenus par les notations de $\pm$ 90° et de 180°.

Hexagones. Sont importantes aussi les familles de sextuplets de nombres premiers complexes. Elles sont caractérisées par les hexagones $H\ [a \pm 4+bi, a \pm 2+(b+4)i]$ ainsi que par les hexagones $H^*\ [a+(b \pm 4)i, a \pm 4 \pm (b \pm 2)i]$. où au centre $a+bi$ se trouve parfois un septième nombre premier, complexe si $b > 0$ ou bien réel.

Dans les sextuplets H^* tous les six nombres premiers sont complexes. En effet, si pour $a = p$ et $b = 4$ un seul sommet p se trouve sur l'axe réel, l'hexagone H^* étant $[p, p \pm 4+(4 \pm 2)\ i, p+8i]$, on a nécessairement l'un des deux nombres $p \pm 4$ divisible par 3 et, par conséquent, l'un des deux nombres complexes $p \pm 4+6i$ n'est pas premier. Si, pour $b = 2$, deux sommets $a \pm 4$ de l'hexagone H^* sont sur l'axe réel et les deux nombres $a \pm 4$ sont premiers simultanément, alors $a = 60m+(3, 15, 27, 33, 45, 57)$ est un multiple de 3 et au sommet $a+6i$ correspond un nombre complexe qui n'est pas premier. On voit ainsi que seuls les hexagones H peuvent renfermer les nombres premiers réels.

On connaît cependant pour $p < 1000$ sept hexagones H^* ayant au centre un nombre premier réel. Parmi eux six ont au centre un nombre premier réel $4N+3$, à savoir $p = 11, 31, 151, 211, 499$ et 1031, tandis qu' un seul a au centre un nombre premier réel $4N+1 = 41$. Ce fait semble souligner la différence profonde entre les nombres premiers $4N+3$ et ceux $4N+1$. Il serait intéressant de rechercher si cette dissymétrie se maintient pour $p > 1000$.

Les nombres premiers réels contenus dans les hexagones H forment quatre suites correspondant aux quatre cas suivants:



Les premiers termes de ces suites sont pour $p < 1000$:

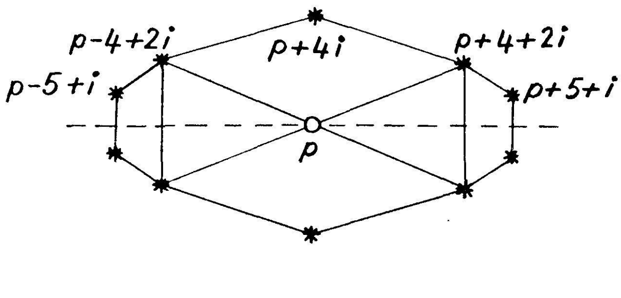
(3-11), (23-31), (359-367), (683-691), ... (7-I)

(89-97), (389-397), (449-457), (569-577), ... (7-II)

(3-7), (43-47), ... (7-III)

Mais dans le cas de la suite (7-IV) on ne trouve pas d'hexagone dans l'intervalle $0 < p < 1993$. Le premier hexagone (7-I) contient trois nombres premiers 3-7-11. Ce triplet est unique, mais dans le plan complexe on a une famille d'hexagones H^* $[a \pm 4 + bi, a \pm 2 + (b \pm 4)i]$ ayant au centre $a + bi$, $b > 0$, un nombre premier complexe.

Chacun des trois nombres premiers 11, 31 et 151 est non seulement au centre d'un hexagone H^* mais aussi au sommet commun des deux pentagones 6-I et 6-III:



Le fait que, pour $p = 4N + 3 < 1000$, cette structure compliquée se reproduit trois fois suggère la question si l'on en trouvera d'autres pour $p =$ $= 4N + 3 > 1000$.

A notre avis, la distribution des multiplets de nombres premiers d'une famille donnée le long de l'axe réel — inexplicable en ce moment — devrait être considérée dans le cadre de la répartition des multiplets de cette famille dans le plan complexe, d'où l'intérêt évident de l'étude des nombres premiers complexes $a+bi$, au moins pour $a^2+b^2<10^7$.

Paris, le 17 avril 1968.

E. G. Kogbetliantz
143, boulevard Brune
Paris 14e