UNE HIÉRARCHIE DES PROBABILITÉS PLUS OU MOINS NULLES APPLICATION A CERTAINS NUAGES DE POINTS

Autor(en): **Lévy, M. Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43221

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

UNE HIÉRARCHIE DES PROBABILITÉS PLUS OU MOINS NULLES APPLICATION A CERTAINS NUAGES DE POINTS

M. Paul Lévy

A la mémoire de J. Karamata

1. De nombreux auteurs, notamment Hausdorff, Besicovitch et Carathéodory, d'une part, Emile Borel et Fréchet, d'autre part, se sont intéressés aux ensembles de mesure de Lebesgue nulle, avec l'idée d'établir une hiérarchie entre eux. Un probabiliste peut avoir une idée analogue et considérer des probabilités « plus ou moins nulles ». Ainsi, un point aléatoire étant uniformément réparti dans une sphère, on peut être tenté de dire que, la probabilité qu'il soit dans un plan diamétral étant $\alpha = 0$, il a une probabilité α^2, « encore plus nulle », d'être sur un diamètre, intersection de deux plans.

L'objet du présent travail est d'esquisser une théorie de ce genre, dans laquelle les probabilités *plus ou moins nulles* seront représentées par des fonctions $\psi(r)$ tendant plus ou moins rapidement vers zéro avec la variable r. Deux événements seront *indépendants* si la probabilité que tous les deux soient réalisés est le produit de leurs probabilités.

Cette extension du calcul des probabilités, qui sera précédée par quelques remarques simples (n^{os} 2 à 4), semble pouvoir être utile dans l'étude de certains nuages de points, tels que ceux des points multiples de la courbe du mouvement brownien plan. Les problèmes qui se posent ainsi sont difficiles; mais l'idée semble assez importante pour que, à défaut de résultats précis, nous présentions un travail qui contient surtout des énoncés de problèmes, quelques conjectures, et une explication intuitive d'un théorème de Dvoretsky, Erdös et Kakutani.

2. La notion qui nous servira de base est celle de mesure au sens de Hausdorff-Besicovitch. Rappelons la définition de ce que nous appelons par abréviation φ-mesure d'un ensemble $\mathscr{E}$ et désignerons par $\mu(\mathscr{E}|\varphi)$; c'est en réalité une mesure extérieure. Nous plaçant dans l'espace euclidien à N dimensions, E_N, nous ne considérerons comme *acceptables* que des fonc-

tions $\varphi(r)$, s'annulant avec r, chacune étant définie, continue et croissante au moins dans un petit intervalle $(0, \rho)$ $(\rho > 0)$, où $\varphi(r)/r^N$ est, au contraire, soit constant, soit constamment décroissant. Ainsi la fonction r^α est acceptable si $0 < \alpha \leqslant N$.

Soit maintenant un ensemble $\mathscr{E} \subset E_N$. Supposons-le recouvert par un ensemble fini ou dénombrable de sphères de rayons r_ν tous $\leqslant r$, et désignons par $s(r)$ la plus grande borne inférieure de $\sum \varphi(r_\nu)$ pour tous les recouvrements vérifiant cette condition. C'est évidemment une fonction non croissante de r, de sorte que sa limite $s(0)$ est bien définie. C'est cette limite qui est la φ-mesure $m(\mathscr{E} \mid \varphi)$ de $\mathscr{E}$. C'est un nombre positif, qui peut être nul ou infini.

Il est commode (et c'est ce que nous ferons), de ne considérer en même temps que des fonctions appartenant à une même *échelle de croissance*, c'est-à-dire à un ensemble $\mathscr{F}$ de fonctions tel que, si $\varphi_1 \in \mathscr{F}$ et $\varphi_2 \in \mathscr{F}$, $\varphi_1(r) - \varphi_2(r)$ a un signe constant au moins dans un petit intervalle $(0, \rho)$. Nous supposerons de plus que $\varphi \in \mathscr{F}$ entraîne $c\varphi \in \mathscr{F}$ $(\forall c > 0)$. Alors $\varphi_1(r)/\varphi_2(r)$ a toujours, pour $r = 0$, une valeur limite c, qui peut être nulle ou infinie.

Il est commode aussi, mais non essentiel, de ne considérer que des fonctions d'allures régulières. Pour fixer les idées, on peut supposer que $\mathscr{F}$ contienne la fonction $\varphi(r) = r$, que $\varphi \in \mathscr{F}$ entraîne $c\varphi^\alpha \in \mathscr{F}$ $(\forall c$ et $\alpha > 0)$ et $\log \varphi \in \mathscr{F}$, et que $\varphi \in \mathscr{F}$, $\psi \in \mathscr{F}$ entraînent $\varphi\psi \in \mathscr{F}$. Naturellement, dans une échelle $\mathscr{F}$, nous n'utiliserons que la section qui contient les fonctions acceptables.

Cette section peut être divisée en classes d'équivalence. Nous dirons que φ_1 et φ_2 sont *strictement équivalents* si la limite c de leur rapport $(r \to 0)$ est un; alors $\mu(\mathscr{E} \mid \varphi_1) = \mu(\mathscr{E} \mid \varphi_2)$. Ces fonctions sont *équivalentes au sens large* si cette limite est finie et >0; alors $\mu(\mathscr{E} \mid \varphi_1)$ et $\mu(\mathscr{E} \mid \varphi_2)$ sont en même temps nuls, ou en même temps infinis, ou en même temps finis et >0. Ces classes jouent un rôle essentiel si on cherche à *associer* à un ensemble donné $\mathscr{E} \subset E_N$ une fonction $\varphi \in \mathscr{F}$ telle que $\mu(\mathscr{E} \mid \varphi) = 1$ [ou $0 < \mu(\mathscr{E} \mid \varphi) < \infty$]. Pour chacun de ces deux problèmes, c'est une classe d'équivalence qui est en réalité associée à $\mathscr{E}$.

3. Rappelons à ce sujet quelques résultats connus [1]). D'abord, à toute fonction acceptable φ on peut de bien des manières associer des ensembles $\mathscr{E} \subset E_N$ dont la φ-mesure soit un. Si $r^N/\varphi(r)$ s'annule avec r, on peut même en

---

[1]) Paul Lévy, *C. R. Acad. Sc.*, 261 (1965), pp. 295-298 et erratum p. 2577; 263 (1960), pp. 540-542. Pour le cas $N = 1$, le premier résultat cité avait été obtenu par A. Dvoretsky dès 1948.

trouver dans n'importe quelle petite sphère. La réciproque n'est pas vraie. Etant donnée, en effet, une fonction acceptable $\psi \in \mathscr{F}$, nous pouvons lui associer une suite infinie d'ensembles $\mathscr{E}_n$ tels que $\mu(\mathscr{E}_n \mid \psi) = n$. Soit $\mathscr{E}$ leur réunion. Si une fonction $\varphi \in \mathscr{F}$ est $o(\psi)(r) \to 0$, on a $\mu(\mathscr{E}_n \mid \psi) = 0$ et par suite $\mu(\mathscr{E} \mid \varphi) = 0$; dans le cas contraire, on a $\mu(\mathscr{E} \mid \varphi) \geqslant \mu(\mathscr{E}_n \mid \varphi) = n$, quel que soit n, et par suite $\mu(\mathscr{E} \mid \varphi) = \infty$. On doit donc associer à $\mathscr{E}$, non une classe de fonctions φ équivalentes, mais une coupure dans $\mathscr{F}$, $\mu(\mathscr{E} \mid \varphi)$ étant nul ou infini suivant que φ est au-dessous ou au-dessus de cette coupure.

Cette construction d'un exemple d'ensemble $\mathscr{E}$ auquel ne s'associe aucune fonction $\varphi \in \mathscr{F}$ est due à M. D. G. Larman. On peut obtenir le même résultat sans se restreindre aux fonctions d'une famille $\mathscr{F}$. Divisons à cet effet E_N en une infinité de pavés égaux V_n, et, $\mathscr{E}_1$ étant un ensemble intérieur à V_1, désignons par $\mathscr{E}_n$ un ensemble égal à $\mathscr{E}_1$ et intérieur à V_n, et par $\mathscr{E}$ la réunion de tous les $\mathscr{E}_n$. La fonction φ étant maintenant bien définie pour r assez petit, mais à cela près absolument quelconque, il est bien évident que $\mu(\mathscr{E} \mid \varphi)$ est nul si $\mu(\mathscr{E}_1 \mid \varphi) = 0$ et infini dans tous les autres cas.

4. La φ-mesure étant une mesure extérieure, on a toujours, pour la réunion $\mathscr{E}$ d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $\mathscr{E}_n$,

$$\mu(\mathscr{E} \mid \varphi) \leqslant \Sigma \mu(\mathscr{E}_n \mid \varphi) , \tag{1}$$

cette inégalité devenant une égalité dans le cas des ensembles *séparés*, c'est-à-dire que les intersections deux à deux des fermetures $\overline{\mathscr{E}}_n$ sont vides ou du moins de φ-mesures nulles. Ces faits évidents ont été utilisés au n° 3 ci-dessus.

Dans le cas où $\varphi(r) = c_N r^N$ (c_N étant le volume de la sphère de rayon un), la φ-mesure se réduit à la mesure extérieure de Lebesgue. On sait que ce n'est pas une vraie mesure, c'est-à-dire qu'elle n'est pas une fonction additive d'ensemble. Elle devient additive, et même complètement additive, si on ne considère que les fonctions mesurables (au sens de Lebesgue). Or les fonctions non mesurables sont en un certain sens les plus nombreuses. Ainsi, si on choisit au hasard un ensemble $\mathscr{E}$ en faisant pour chaque point x un tirage au sort à pile ou face indépendant des autres et en prenant pour $\mathscr{E}$ l'ensemble des x pour lesquels on a obtenu pile, l'ensemble obtenu n'a aucune chance d'être mesurable. Pourtant, on ne peut pas définir un ensemble non mesurable particulier sans utiliser l'axiome du choix. Comme le disait Emile Borel, si deux savants parlent d'un ensemble non mesurable, ils ne peuvent pas être sûrs de penser au même ensemble. En d'autres termes, on ne peut pas donner d'exemple concret d'un ensemble qui ne soit pas mesurable.

Dans le cas des fonctions φ pour lesquelles $r^N/\varphi(r)$ tend vers zéro avec r, la théorie de Lebesgue ne s'étend pas sans changement, parce qu'à l'intérieur d'une sphère un ensemble et son complément ne peuvent pas avoir en même temps une φ-mesure finie. Carathéorody a tourné la difficulté en se restreignant aux sous-ensembles d'un ensemble donné de φ-mesure finie. Dans ces conditions, la théorie de Lebesgue se généralise sans difficulté. Mais les remarques du précédent alinéa conduisent à se demander si on ne peut pas définir autrement une classe $\mathscr{C}$ très vaste d'ensembles qui seraient *réellement φ-mesurables*. Nous entendons par que, dans cette classe, $\mu(\mathscr{E} \mid \varphi)$ serait une fonction d'ensemble complètement additive, c'est-à-dire que, si $\mathscr{E}$ est la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles φ_n de cette classe, et si $\mathscr{E}_n'$ est la partie de $\mathscr{E}_n$ qui n'appartient à aucun des $\mathscr{E}_\nu$ d'indices $\nu<n$, on aurait toujours

$$\mu(\mathscr{E} \mid \varphi) = \Sigma\mu(\mathscr{E}_n' \mid \varphi). \tag{2}$$

En d'autres termes, pour des ensembles disjoints, la mesure serait complètement additive. Pour deux ensembles, on aurait

$$\mu(\mathscr{E} \mid \varphi) = \mu(\mathscr{E}_1 \mid \varphi) + \mu(\mathscr{E}_2 \mid \varphi) - \mu(\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2 \mid \varphi), \tag{3}$$

formule qui se généralise par une formule connue de Poincaré pour le cas de n ensembles. La formule (2) devient évidente si un des $\mu(\mathscr{E}_n \mid \varphi)$ est infini.

La question qui se pose, et que je n'ai pas résolue, est la suivante: *Les ensembles qu'on peut nommer individuellement, sans utiliser l'axiome du choix, sont-ils toujours φ-mesurables, quelle que soit la fonction φ?* C'est, je crois, un problème difficile, mais qui mérite qu'on y réfléchisse. Si la réponse est négative, peut-on du moins définir des opérations dont on soit sûr qu'elles n'introduisent que des ensembles φ-mesurables ? En tout cas, dans la suite, nous ferons l'hypothèse suivante: *il ne peut s'agir que d'ensembles d'une famille borélienne à l'intérieur de laquelle, quelle que soit la fonction φ, la φ-mesure soit complètement additive*, c'est-à-dire que la formule (2) s'applique toujours, que les termes du second membre soient nuls ou non, et finis ou infinis. La φ-mesure est alors une *vraie mesure* et on peut lui donner une interprétation probabiliste. C'est ce que nous allons faire.

5. Soit donc un ensemble $\mathscr{E}^*$, réunion de n ensembles séparés égaux $\mathscr{E}_\nu$ $(\nu = 1, 2, ..., n)$; si ces ensembles sont associés à une fonction φ telle

que leur φ-mesure soit un, celle de $\mathscr{E}^*$ est n, et c'est $\varphi^* = \varphi/n$ qui doit être associé à $\mathscr{E}^*$ pour que l'on ait $\mu(\mathscr{E}^* \mid \varphi^*) = 1$. Si on choisit au hasard un point dans $\mathscr{E}^*$, les différents $\mathscr{E}_\nu$ étant également probables, c'est $1/n = \varphi^*/\varphi$ qui mesure leur probabilité.

Pour établir une hiérarchie des probabilités nulles, nous n'avons qu'à étendre cette remarque au cas où un ensemble $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}^*$ n'est qu'une partie négligeable de $\mathscr{E}^*$, de sorte que $\psi(r) = \varphi^*(r)/\varphi(r)$ tend vers zéro avec r. C'est alors ce quotient, et non φ, qu'il faut considérer, pour dire que sa décroissance plus ou moins rapide peut mesurer en quelque sorte la probabilité *plus ou moins nulle* qu'un point de $\mathscr{E}^*$ appartienne à $\mathscr{E}$.

Le cas sans doute le plus important est celui où $\mathscr{E}^*$ est la sphère de rayon un; $\varphi^*(r)$ est alors le volume $c_N r^n$ de la sphère de rayon r.

De toute façon, si $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}' \subset \mathscr{E}^*$, si on définit la probabilité (éventuellement nulle) qu'un point de $\mathscr{E}'$ appartienne à $\mathscr{E}$ par la formule

$$Pr(\mathscr{E} \mid \mathscr{E}') = \{\varphi'/\varphi\}, \tag{4}$$

φ' étant la fonction associée à $\mathscr{E}'$, et le signe $\{\cdot\}$ indiquant que c'est la rapidité de la décroissance de φ'/φ pour r très petit qui nous intéresse, on a

$$Pr(\mathscr{E} \mid \mathscr{E}^*) = Pr(\mathscr{E} \mid \mathscr{E}')\, Pr(\mathscr{E}' \mid \mathscr{E}^*), \tag{5}$$

ce qui généralise une des formules fondamentales du calcul des probabilités.

Il est alors naturel de dire que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont *indépendants dans* $\mathscr{E}^*$ si on a

$$Pr(\mathscr{E} \mid \mathscr{E}' \cap \mathscr{E}^*) = Pr(\mathscr{E} \mid \mathscr{E}^*), \tag{6}$$

et par suite, en sous-entendant qu'il s'agit d'un point choisi dans $\mathscr{E}^*$,

$$Pr\{\mathscr{E} \cap \mathscr{E}') = Pr\,\mathscr{E} \cdot Pr\,\mathscr{E}', \tag{7}$$

c'est-à-dire que la probabilité de la réalisation simultanée de deux événements indépendants est donnée par la même formule que dans le calcul des probabilités classique.

L'intérêt de cette définition est qu'elle suggère l'idée que, si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ dépendent de deux séries de tirages au sort indépendantes l'une de l'autre, on peut appliquer la formule (7) [1]).

6. Nous allons voir ce que peut donner l'application de cette idée à l'étude des *nuages homogènes*.

Nous appelons *nuage* un ensemble de points de mesure de Lebesgue nulle, ne contenant aucun continu, et tel que son intersection avec n'importe quel voisinage de n'importe lequel de ses points ait la puissance du continu.

---

[1]) Remarquons toutefois que, s'il s'agit d'un tirage au sort dépendant d'une loi continue (c'est-à-dire qu'aucun n'a une probabilité positive) son résultat est pr. s. un objet qu'on ne peut pas nommer individuellement. Nous faisons donc implicitement une hypothèse un peu plus hardie que celle énoncée au n° 4.

Pour définir l'homogénéité d'un nuage $\mathscr{E}$, il faut supposer une mesure définie sur sa fermeture $\overline{\mathscr{E}}$. Considérons d'abord le cas où $\overline{\mathscr{E}}$ est un volume $V \subset E_N$ (pouvant être une réunion de parties séparées). Désignons par e l'intersection de $\mathscr{E}$ avec un volume $v \subset V$, fini et de mesure $m(v) > 0$, et associons à e une division de l'échelle $\mathscr{F}$ en trois classes, une classe *inférieure* pour laquelle $\mu(e \mid \varphi) = 0$, une classe *supérieure* pour laquelle $\mu(e \mid \varphi) = \infty$, et une classe *intermédiaire.* Nous dirons que le nuage e est *homogène* si cette division est indépendante de v.

Dans le cas où la classe intermédiaire existe, nous dirons qu'un nuage est *tout à fait homogène* si, pour les fonctions φ de cette classe, $\mu(e \mid \varphi)$ est proportionnel à $m(v)$.

Ces définitions s'étendent sans difficulté au cas où $\overline{\mathscr{E}}$ est une variété différentiable, sur laquelle il y a une mesure géométrique bien définie. Dans le cas où c'est un ensemble parfait discontinu, du moins dans les cas qui semblent pratiquement les plus importants, il y a souvent une mesure $m(v)$ qui s'impose naturellement.

Ainsi, considérons l'ensemble $\mathscr{E}^*$ des nombres réels positifs dont la représentation décimale ne comprend pas le chiffre 4. A un tel nombre x, on peut faire correspondre un nombre y dont la représentation dans le système à base 9 se déduit de la représentation décimale de x en diminuant d'une unité les chiffres supérieurs à 4. Chaque partie e de $\mathscr{E}^*$ a pour image l'ensemble e' des y qui correspondent aux $x \in e$, et c'est la mesure de Lebesgue de e' qui deviendra la mesure adoptée sur $\mathscr{E}^*$. Cette définition s'impose, et apparaît comme homogène, en ce sens que l'ensemble $\mathscr{E}^*$ peut être divisé en 9^n parties égales, chacune intérieure à un intervalle de longueur $1/10^n$, et qu'elle leur donne la même mesure $1/9^n$. On voit d'ailleurs aisément que, pour $\varphi(r) = r^\alpha$ ($\alpha = log\, 9/log\, 10$), on a $\mu[\mathscr{E}_1 \cap (0,1) \mid \varphi] = 1$.

Il serait intéressant d'étudier systématiquement, au point de vue de leurs φ-mesures, d'autres ensembles arithmétiques homogènes tels que les suivants: ensemble des nombres dans la représentation décimale desquels un chiffre donné j ne figure qu'un nombre fini de fois, ou bien une infinité de fois mais avec une fréquence ne tendant pas vers la valeur théorique 1/10. Ce dernier ensemble étant désigné par e_j, la réunion des dix ensembles e_j est l'ensemble des nombres qui ne sont pas normaux (au sens d'Emile Borel, pour la numération décimale). Il faut remarquer que ces dix ensembles ne sont pas indépendants, la rareté de certaines décimales devant être compensée par une fréquence accrue d'une ou plusieurs autres.

Des problèmes analogues se posent pour d'autres systèmes de numération, notamment pour la représentation des nombres par des fractions continues.

Considérons maintenant l'ensemble $\mathscr{E}_0$ des zéros de la fonction aléatoire de Wiener $X(t)$. C'est presque sûrement (pr. s.) un ensemble parfait discontinu, de mesure nulle. Il est facile de définir un paramètre τ variant d'une manière continue sur $\mathscr{E}_0$. Sa variation $\Delta\tau$ entre les instants t_0 et t_1 sera la limite (qui existe pr. s.) du rapport $L/\sqrt{e}$ $(l \to 0)$, L étant la longueur totale des intervalles de longueurs $< l$ ayant chacun pour extrémités deux points consécutifs de $\mathscr{E}_0 \cap (t_1 - t_0)$. D'après S. J. Taylor et G. J. Wendel[1]), pour $\varphi(r) = \sqrt{r \, log \mid log \, r \mid}$, on a

$$\mu[\mathscr{E}_0 \cap (t_0, t_1) \mid \varphi] = c\Delta\tau \,. \tag{8}$$

La fonction ψ qui lui correspond est donc $c'\Delta\tau \sqrt{r/log \mid log \, r \mid}$ (c et c' sont des constantes finies et >0).

A deux déterminations indépendantes $X'(t)$ et $X''(t)$ de $X(t)$ correspondent deux ensembles $\mathscr{E}_0'$ et $\mathscr{E}_0''$, et deux valeurs $\Delta\tau'$ et $\Delta\tau''$ de Δr [pour un même intervalle (t_0, t_1)]. Si le principe intuitif énoncé à la fin du n° 5 est exact, la fonction ψ associée à l'intersection $\mathscr{E}_0' \cap \mathscr{E}_0'' \cap (t_0, \tau_1)$ est $c'^2\Delta\tau'\Delta\tau'' \, r/log \mid log \, r \mid$, ce qui correspond à une fonction $\Phi(r)$ devenant infinie avec $1/r$. Cela ne peut signifier qu'une chose: cette intersection est pr. s. au plus un ensemble infini dénombrable. En fait, elle est pr. s. vide, c'est-à-dire que la courbe du mouvement brownien plan ne passe pr. s. pas à l'origine (sauf si on la fait partir de l'origine, et dans ce cas elle n'y repasse p. s. pas). Ce résultat vérifie notre principe intuitif.

7. Nous allons maintenant appliquer ce principe à l'étude de la courbe Γ du mouvement brownien plan. On déduit aisément de théorèmes connus (théorème de l'alternative zéro-un de Kolmogorov; la mesure de Lebesgue de Γ est nulle), que la φ-mesure de la courbe entière est pr. s. nulle ou infinie, suivant la fonction φ considérée, et que, pour un arc fini γ, si une fonction φ appartient à la classe intermédiaire, $\mu(\gamma \mid \varphi)$ est pr. s. proportionnel à la durée de parcours t de l'arc γ. En fait, d'après S. J. Taylor[2]), en posant $\omega(r) = \mid log \, r \mid log \, log \mid log \, r \mid$, et $\varphi(r) = r^2 \omega(r)$, on a pr. s. $\mu(\gamma \mid \varphi) = ct \; (0 < c < \infty)$.

Considérons maintenant une aire S et la partie Γ' de Γ intérieure à S. Ce ne sera pas une courbe continue, mais une réunion d'arcs continus ayant leurs extrémités sur Γ. La formule de S. J. Taylor s'applique sans difficulté à une portion finie γ' de Γ', à condition de remplacer γ par un partie finie γ'

---

[1]) S. J. Taylor et J. G. Wendel. The exact Hausdorff measure of the zero set of a stable process. *Zeitschrift f. Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 6 (1966), pp. 170-180.

[2]) S. J. Taylor. The exact Hausdorff measure of the sample paths for planar Brownian motion. *Proc. Cambridge phil. Soc.*, 60 (1964), pp. 253-258. Ce travail complète un résultat partiel de D. Ray, *Trans. Amer. math. Soc.*, 106 (1963) pp. 436-444.

de Γ' et t par t', mesure du temps employé à parcourir γ'. La fonction $\psi(r)$ qu'on peut associer à l'idée de la probabilité qu'un point choisi dans S appartienne à γ' est alors

$$(9) \qquad \frac{\pi r^2}{m(S)\,\varphi(r)} = \frac{\pi c t'}{m(S)\,\omega(r)}.$$

Supposons maintenant Γ' divisé en arcs consécutifs γ'_n correspondant à une même durée de parcours t'. Si t' est assez grand, on peut négliger l'influence du fait que deux arcs consécutifs aient une extrémité commune (rien n'empêcherait d'ailleurs de ne considérer que les arcs γ'_{2n}), et considérer la probabilité comme uniformément répartie dans S. Ces arcs sont donc indépendants, au moins asymptotiquement, et il y a lieu de penser que la formule (7) s'applique. Pour l'intersection de n arcs, on aurait alors une probabilité liée à une fonction $\psi(r)$ de la forme $c_n/\omega^n(r)$. On voit alors que, si une fonction $\Phi(r)$ est telle que le quotient $\psi(r) = r^2/\Phi(r)$ tende vers zéro avec r plus rapidement que n'importe quelle puissance de $1/|\log r|$, c'est-à-dire si $\log[\Phi(r)/r^2]/\log|\log r|$ augmente indéfiniment avec $1/r$, la Φ-mesure de l'intersection de n arcs choisis parmi les γ'_ν est pr. s. infinie. Donc, pr. s., cette intersection est un ensemble infini non dénombrable, contenu dans l'ensemble $\mathscr{E}_n$ des points multiples de Γ d'ordre $\geqslant n$. Donc, si le principe intuitif énoncé à la fin du n° 5 est exact, quelque grand que soit n, cet ensemble est pr. s. partout dense dans le plan.

Pour montrer l'extraordinaire densité de cet ensemble $\mathscr{E}_n$ (qui est un nuage), remarquons que le choix de n des arcs γ'_ν peut être effectué d'une infinité de manières, le nombre des choix possibles ayant la puissance du continu; cet ensemble contient donc la réunion d'un ensemble de puissance **C** d'ensembles partiels non dénombrables, et « presque disjoints » en ce sens qu'un point choisi sur l'un d'eux n'appartient pr. s. à aucun autre. Or nous n'avons obtenu ainsi qu'une partie de $\mathscr{E}_n$. Il peut en effet arriver que les n' ($n' \geqslant n$) valeurs du temps qui correspondent à un point de $\mathscr{E}_n \cap S$ correspondent à un même arc γ'_ν ou à moins de n arcs distincts. Il faut donc tenir compte des points multiples de chacun des arcs γ'_ν considéré indépendamment du reste de la courbe Γ.

Pour montrer que ces points multiples existent sur chaque arc de Γ, et même forment sur n'importe quel arc parcouru en un temps donné τ (même très petit) un ensemble ayant la puissance du continu, il n'y a qu'à remarquer que la probabilité de cette circonstance ne peut être que zéro ou un (cela se déduit du théorème de Kolmogorov) et est indépendante de τ comme de l'origine de l'arc considéré. Or, si cet arc contient γ'_1 et si τ augmente indéfiniment, la probabilité qu'il contienne n arcs γ_ν' distincts, et que par suite la circonstance considérée soit réalisée, tend vers un. Elle n'est donc pas nulle, et par suite est toujours égale à un, c'est-à-dire que n'importe quel petit arc γ de Γ contient pr. s. un ensemble de points multiples (de cet arc γ lui-même) d'ordre au moins égal à n. Or cet ensemble n'est évidemment qu'une partie négligeable de l'ensemble des points multiples d'ordres élevés de la courbe Γ situé sur l'arc γ.

8. On sait que, non seulement cette conséquence de notre principe intuitif est exacte, mais que tout arc γ de Γ contient pr. s. des points multiples d'ordre infini, et même d'ordre $\mathbf{C}$. C'est un théorème de Dvoretsky, Erdös et Kakutani (D.E.K.) [1] qui m'avait d'abord beaucoup surpris. Sa démonstration étant assez délicate, j'ai cherché à rendre ce théorème plus compréhensible par des considérations heuristiques. J'ai déjà montré ailleurs [2] que les extraordinaires détours de la courbe Γ, qui ne l'empêchent pourtant pas d'être un ensemble de mesure nulle, semblent rendre inévitable l'existence de ces points multiples d'ordre $\mathbf{C}$. Les considérations qui précèdent, en introduisant les φ-mesures, sont peut-être un peu plus précises. Sans donner exactement la fonction φ (ou la coupure dans une échelle $\mathscr{F}$) qu'on peut associer à l'ensemble des points multiples d'ordre $\geqslant n$ d'un arc γ de Γ, elles conduisent (aussi par une méthode heuristique) au résultat analogue pour un sous-ensemble de cet ensemble et par conséquent à une borne inférieure de la fonction ψ, donc à une borne supérieure de la fonction φ (ou de la coupure) associée à cet ensemble lui-même. Cet ensemble est donc bien infini non dénombrable.

Sans insister sur le passage des points multiples d'ordre n à ceux d'ordre $\mathbf{C}$, je pense avoir montré d'une nouvelle manière que le théorème de D.E.K. ne doit plus trop nous surprendre [3]. En outre, la définition de l'indépendance indiquée au n° 5 et le principe intuitif énoncé ensuite peuvent conduire à d'autres applications, et peut-être à une démonstration de la validité de ce principe général.

38, Av. Th. Gautier
Paris 16e.

(Reçu le 18 Avril 1968)

---

[1] A. Dvoretsky, P. Erdös et S. Kakutani. Points of multiplicity C of plane Brownian paths. *Bull. of the Research Council*, Israel, 7F (1958), pp. 175-180.

[2] Paul Lévy. Conjectures relatives aux points multiples de certaines courbes planes. *C.R. Acad. Sc.*, 266 (1968), pp. 223-225. *Erratum* à cette note: p. 223, l. 8 à partir du bas, lire: *la plus petite aire sans trou* (c'est-à-dire la réunion de l'arc considéré et des parties du plan qu'il entoure).

[3] Peut-être peut-on avoir un autre raisonnement intuitif conduisant plus directement à ce théorème en admettant que $Pr\{\mathscr{E}_{n+1} | \mathscr{E}_n\}$ ne dépend pas de n. Mais cette hypothèse semble plus hardie que celles faites dans le texte. Je signale enfin que les raisonnements basés sur la formule (7) permettent aussi de prévoir l'existence des points doubles et la non existence des points triples pour le mouvement brownien à trois dimensions, et la non-existence des points doubles quand il y a plus de trois dimensions. C'est par erreur que, dans *Processus stochastiques et mouvement brownien* (Gauthier-Villars, 2e éd., 1965, p. 327, l. 7), j'ai parlé de l'existence des points triples pour le cas de trois dimensions, alors que c'est le contraire qui avait été établi par les auteurs déjà cités et S. J. Taylor.

vide-leer-empty