I. Entiers algébriques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

ENTIERS ALGÉBRIQUES
POLYGONES ET POLYÈDRES RÉGULIERS

G. Pólya

A la mémoire de J. Karamata

On pourrait dire que l'objet de la science est de voir le principe général dans les cas particuliers et les cas particuliers dans le principe général. En tout cas il y a un précepte pédagogique qui me paraît évident: L'introduction d'une notion générale doit être précédée par des cas particuliers qui la suggèrent et suivie par des cas particuliers qui l'illustrent en en montrant l'utilité. Mais ce précepte de sens commun est, malheureusement, souvent négligé aujourd'hui: Le professeur ne parle que de notions générales que l'élève critique doit trouver vides de contenu et d'intérêt. Descartes a observé que le sens commun est, en effet, chose peu commune — hélas, cela paraît être le cas encore aujourd'hui.

Le but de cet article est d'illustrer la théorie des entiers algébriques par des applications qui ne présupposent que les rudiments de la théorie. L'intérêt de la proposition du n° 1.2 sera montré par les conséquences qu'on peut en tirer; voir les propositions des n^os^ 2.2 et 2.3 sur les polygones réguliers et celle du n° 3.6 sur les polyèdres réguliers.

I. Entiers algébriques

1.1. Un entier algébrique α est, par définition, un nombre réel ou complexe satisfaisant une équation de la forme

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sont des entiers ordinaires. Nous supposons connues quelques propriétés élémentaires des entiers ordinaires ou rationnels

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

et nous utiliserons deux faits concernant les entiers algébriques:

Si α et β sont des entiers algébriques

$$\alpha + \beta\,, \quad \alpha - \beta \quad \textit{et} \quad \alpha\beta$$

seront aussi des entiers algébriques.

Un entier algébrique qui est un nombre rationnel est nécessairement un entier ordinaire.

1.2. *Si les nombres*

$$\theta/\pi \quad \textit{et} \quad \cos\theta$$

sont rationnels tous les deux, $\cos\theta$ *aura une des cinq valeurs suivantes :*

$$1, \tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}, -1\,.$$

Par hypothèse, θ/π est rationnel,

$$\theta = \frac{2\pi m}{n}$$

où m et n sont des entiers ordinaires, $n \geqq 1$. Posons

$$e^{i\theta} = \xi\,.$$

Alors

$$\xi^n - 1 = 0 \quad \textit{et} \quad (\xi^{-1})^n - 1 = 0\,.$$

Donc ξ, ξ^{-1} et

$$\xi + \xi^{-1} = 2\cos\theta$$

sont des entiers algébriques. Par hypothèse, $\cos\theta$ est rationnel, donc $2\cos\theta$ est un entier ordinaire. Mais la valeur absolue de $2\cos\theta$ ne peut pas être supérieure à 2, donc $2\cos\theta$ ne peut prendre qu'une des valeurs suivantes

$$2, 1, 0, -1, -2$$

qui seront actuellement prises lorsque θ est

$$0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi,$$

respectivement. Nous avons établi la proposition énoncée.

1.3. *Si les nombres*

$$\theta/\pi \quad \textit{et} \quad (\tan\theta)^2$$

sont rationnels tous les deux, $(\tan\theta)^2$ *aura une des cinq valeurs suivantes :*

$$0, \frac{1}{3}, 1, 3, \frac{1}{0}.$$

(J'ai pris la liberté de regarder $\infty = 1/0$ comme « rationnel ».)

Par hypothèse, $2\theta/\pi$ et

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

sont rationnels tous les deux et ainsi nous n'avons qu'à appliquer la proposition du n° 1.2.

1.4. *Excepté les quatre cas suivants:* n = 1, 2, 4, *et* 8, tan $2\pi/$n *est un nombre irrationnel pour chaque entier ordinaire positif* n.

En observant que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on déduira facilement cette proposition de celle du n° 1.3 [1]).

II. Polygones réguliers

2.1. Nous considérons un système de coordonnées rectangulaires dans le plan et nous appellerons *point du réseau plan* un point (x, y) dont les deux coordonnées x et y sont des entiers ordinaires.

Si un polygone á n *côtés est équiangle et tous ses sommets sont des points du réseau plan,* n *est nécessairement* 4 *ou* 8.

Appelons une ligne droite *ligne du réseau* si elle contient deux points différents du réseau plan. La tangente de l'angle qu'une ligne du réseau fait avec l'axe des abscisses est évidemment rationnelle. Je dis que la tangente de l'angle compris par deux droites quelconques du réseau est aussi rationnelle. En effet, soient α et β les angles que ces deux droites font avec l'axe des abscisses. L'angle compris par elles est $\alpha - \beta$ et

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

L'angle extérieur formé par deux côtés consécutifs d'un polygone équiangle à n côtés est $2\pi/n$. Dans notre cas, par hypothèse, les deux côtés sont des droites du réseau et ainsi tan $2\pi/n$ doit être rationnelle. Par le théorème du n° 1.4, n est égal à 4 ou à 8.

---

[1]) La proposition du n° 1.2 a été énoncée et démontrée différemment par H. Hadwiger, *Elemente der Math.*, **1**, 98-100, 1946. Elle n'est en effet que le cas particulier le plus simple de la proposition générale suivante: *Soient* k *et* n *deux entiers ordinaires premiers entre eux,* n > 2. *Alors* 2 cos (2πk/n) *sera un entier algébrique de degré* φ (n)/2; voir D. H. Lehmer, *Amer. Math. Monthly*, **40**, 165-166, 1933. (Un entier algébrique est rationnel s'il est de degré 1; si φ $(n)/2 = 1$ on a $n = 3$, 4 ou 6.)