Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES DE PLUSIEURS ENTIERS

Kapitel: 1. Introduction

Autor: Delange, Hubert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43864

SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES DE PLUSIEURS ENTIERS

par Hubert DELANGE

1. INTRODUCTION

Le résultat suivant a été conjecturé par Wirsing et démontré par G. Halász [1)].

Soit f une fonction arithmétique multiplicative satisfaisant à

$$|f(n)| \leqslant 1 \textit{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

L'une des deux circonstances suivantes a lieu :

(a) f *possède une valeur moyenne nulle* (autrement dit, $\frac{1}{x}\sum_{n \leq x} f(n)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$).

(b) *Il existe une constante complexe non nulle* C, *un nombre réel* a *et une fonction complexe* L *définie sur* $\mathbf{R}^+$ *et satisfaisant à*

$$|\mathrm{L}(\mathrm{t})| = 1 \textit{ pour tout } \mathrm{t} \in \mathbf{R}^+$$

et
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{L}(\lambda \mathrm{t})}{\mathrm{L}(\mathrm{t})} = 1 \textit{ pour tout } \lambda > 0,$$

la limite étant uniforme sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$, *tels que l'on ait pour* x *tendant vers* $+\infty$

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leq x} f(n) = C\mathrm{x}^{ia} L(\log x) + o[1]. \tag{1}$$

Nous nous proposons ici d'étendre ce résultat aux fonctions multiplicatives de plusieurs entiers.

1.1. Nous désignons par $\mathscr{A}_q$ l'ensemble des fonctions réelles ou complexes de q entiers strictement positifs.

1) WIRSING: „Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen. II“, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 18 (1967), p. 411-467.

G. HALÁSZ: „Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen“, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 19 (1968), p. 365-403.

Nous disons que la fonction f de $\mathscr{A}_q$ est « multiplicative » si l'on a

$$f(1, 1, ..., 1) = 1$$

et $f(n_1'n_1'', n_2'n_2'', ..., n_q'n_q'') = f(n_1', n_2', ..., n_q') f(n_1'', n_2'', ..., n_q'')$ lorsque $(n_1'n_2'...n_q', n_1''n_2''...n_q'') = 1$ [1].

Nous désignons par $\mathfrak{M}_q$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{A}_q$ qui sont multiplicatives.

Une fonction de $\mathfrak{M}_q$ est complétement déterminée par les valeurs $f(p^{r_1}, p^{r_2}, ..., p^{r_q})$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers et $[r_1, r_2, ..., r_q]$ l'ensemble des systèmes de q entiers $\geqslant 0$ non tous nuls. Ces valeurs peuvent d'ailleurs être choisies arbitrairement.

Nous appelons « valeur moyenne » de la fonction f de $\mathscr{A}_q$ la limite de

$$\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_q} \sum_{\substack{n_1 \leq x_1 \\ n_2 \leq x_2 \\ \cdots\cdots \\ n_q \leq x_q}} f(n_1, n_2, ..., n_q)$$

lorsque $x_1, x_2, ..., x_q$ tendent vers $+\infty$ indépendamment les uns des autres, si cette limite existe et est finie.

Lorsque f possède une valeur moyenne, nous désignons celle-ci par $M(f)$.

1.2. Ceci dit, on a le résultat suivant:

THÉORÈME 1: *Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_q$ satisfaisant à $|f(n_1, n_2, ..., n_q)| \leqslant 1$ quels que soient $n_1, n_2, ..., n_q \in \mathbf{N}^*$.*

Une des deux circonstances suivantes a lieu :

(a) *f possède une valeur moyenne nulle ;*

(b) *Il existe une constante complexe non nulle* C, *des constantes réelles* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_q$ *et des fonctions complexes* $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, ..., \mathrm{L}_q$ *définies sur* $\mathbf{R}^+$ *et satisfaisant à*

$$|\mathrm{L}_j(\mathrm{t})| = 1 \textit{ pour tout } \mathrm{t} \in \mathbf{R}^+$$

et $$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{L}_j(\lambda \mathrm{t})}{\mathrm{L}_j(\mathrm{t})} = 1 \textit{ pour tout } \lambda > 0 \; (\mathrm{j}=1, 2, ..., \mathrm{q}),$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$, *telles que l'on ait quand* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_q$ *tendent vers* $+\infty$ *indépendamment les uns des autres*

[1] Cf H. DELANGE, « Sur les fonctions de plusieurs entiers strictement positifs », L'Enseignement Mathématique, 15 (1969), p. 77-88.

$$\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_q} \sum_{\substack{n_1 \leq x_1 \\ n_2 \leq x_2 \\ \cdots\cdots \\ n_q \leq x_q}} f(n_1, n_2, \dots, n_q) = \tag{2}$$

$$= C x_1^{ia_1} x_2^{ia_2} \dots x_q^{ia_q} L_1(\log x_1) \dots L_q(\log x_q) + o\,[1]$$

Nous démontrerons ce résultat en nous plaçant dans le cas où $q = 2$. Le lecteur verra facilement comment la démonstration doit être modifiée pour traiter le cas où $q > 2$.

Pour simplifier l'écriture, nous remplacerons n_1 et n_2 par m et n et x_1 et x_2 par x et y.

En restant dans le cas où $q = 2$, nous préciserons — comme on peut le faire pour le résultat de Halász — dans quel cas on a chacune des circonstances (a) et (b).

De plus, nous donnerons des théorèmes fournissant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à

$$|f(m, n)| \leqslant 1 \text{ quels que soient } m \text{ et } n \in \mathbf{N}^*$$

possède une valeur moyenne non nulle, ou pour que

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tende vers une limite lorsque x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe quelconque, cette limite étant indépendante de la valeur du rapport.

Ici encore, le cas où $q = 2$ n'est pas essentiellement différent du cas où $q > 2$.

Enfin, nous indiquerons deux résultats particuliers intéressants.

1.3. Il est entendu une fois pour toutes que, tout au long de cet article, la lettre p représente toujours un nombre premier. Les lettres m, n, d, j, k, r, s représentent des entiers; m, n, d sont toujours des entiers $\geqslant 1$.

Une somme qui ne contient aucun terme est considérée comme nulle, et un produit qui n'a aucun facteur est considéré comme égal à 1.

2. Préliminaires

2.1. Il nous est utile de donner plus de précisions sur les résultats de Halász.

f étant fonction arithmétique multiplicative satisfaisant à

$$|f(n)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1,$$

Halász montre d'abord qu'il existe au plus un u réel tel que l'on ait