Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE RELATIVE AUX THÉORÈMES DES S-UNITÉS ET DES S-CLASSES

Autor: Joly, Jean-René

Kapitel: 5. Un exemple explicite

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43865

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

déterminer explicitement une telle famille: on sait en effet (voir par exemple [10], p. 70) que toute classe d'idéaux de A contient un idéal entier $\mathfrak{a}$ tel que

$$N\mathfrak{a} \leqq M_K = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \cdot \frac{n!}{n^n} \sqrt{|\Delta|},$$

Δ désignant le discriminant de K. On voit donc qu'on peut prendre pour D l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A tels que $N\mathfrak{p} \leq M_K$. Bien entendu, l'ensemble D ainsi construit est en général « beaucoup trop grand »: mais il est clair que la détermination d'un D « minimal » équivaut pratiquement à la détermination de la structure du groupe des classes de A, ce qui est une autre affaire.

5. Un exemple explicite

Montrons pour terminer, sur un exemple numérique simple, que les méthodes précédentes mènent à des résultats tout à fait explicites. Nous considérons le corps quadratique imaginaire $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-23})$, pour lequel $n = 2$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $a = 1$, $r = 0$, $W = \{1, -1\}$. Posons:

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{-23}}{2};$$

le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$ est $X^2 + X + 6$, et on a $A = \mathbf{Z}[\alpha]$, Δ (le discriminant) $= -23$. De là

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \cdot \frac{n!}{n^n} \sqrt{|\Delta|} = \frac{2\sqrt{23}}{\pi} \leq 4,$$

et le groupe des classes de A est engendré par les classes des facteurs premiers de 2 et de 3 dans A. Mais (pour $p = 2,3$) on a

$$A/pA = \mathbf{Z}[\alpha]/p\mathbf{Z}[\alpha] \simeq \mathbf{Z}[X]/(p, X^2+X+6)$$

d'où, puisque $6 \equiv 0 \pmod{p}$,

$$A/pA \simeq \mathbf{Z}[X]/(p, X^2+X) \simeq \mathbf{F}_p[X]/(X(X+1))$$

et finalement $A/pA \simeq \mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p$. Ainsi, 2 et 3 sont décomposés dans A, et le calcul ci-dessus montre plus précisément qu'on peut écrire

$$(2) = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}, \quad (3) = \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}},$$

avec

$$\mathfrak{p} = (2, \alpha), \quad \bar{\mathfrak{p}} = (2, \alpha+1),$$

et

$$\mathfrak{q} = (3, \alpha), \quad \bar{\mathfrak{q}} = (3, \alpha+1).$$

On vérifie sans peine que $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = (\alpha)$, $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = (\alpha+1)$ et $\mathfrak{p}^3 = (\alpha+2)$. En revanche, $\mathfrak{p}^2$ n'est pas principal: car $N\mathfrak{p}^2 = 4$, mais $\mathfrak{p}^2 \neq (2)$, alors que 2 et -2 sont les seuls entiers de K ayant pour norme 4.

Il résulte de tout ceci que $\bar{\mathfrak{p}} \sim \mathfrak{p}^{-1}$, $\bar{\mathfrak{q}} \sim \mathfrak{q}^{-1}$, $\mathfrak{q} \sim \bar{\mathfrak{q}}^{-1} \sim \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^3 \sim (1)$, mais qu'*on n'a pas* $\mathfrak{p}^2 \sim (1)$ (*ni* a fortiori $\mathfrak{p} \sim (1)$): le groupe des classes de A est donc cyclique d'ordre 3, engendré par la classe de $\mathfrak{p} = (2, \alpha)$.

Soit maintenant $\mathfrak{p}_\infty$ l'unique place archimédienne de K et posons

$$D = \{\mathfrak{p}\}, \quad S = \{\mathfrak{p}_\infty, \mathfrak{p}\}.$$

Alors, avec les notations du §1, on a $d = 1$, $s = 2$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$, $n_1 = 3$, $x_1 = t = \alpha + 2$. Et on peut affirmer:

L'anneau A_S est formé des éléments de K du type $(x+y\alpha) / (\alpha+2)^m$ ($m \geq 0$; $x, y \in \mathbf{Z}$); A_S est un anneau principal: $h_S = 1$; enfin, le groupe U_S est formé des éléments du type $\pm (\alpha+2)^m$ ($m \in \mathbf{Z}$) (le fait que $\alpha + 2$ soit une « unité fondamentale » pour A_S tient à ce que $N(\alpha+2) = 8$ et que ni 2 ni 4 ne sont normes de S-unités de K).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY, La théorie du corps de classes. *Ann. of Math.* (1940), 41, pp. 394-418.
[2] ARTIN-WHAPLES, Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations. *Bull. Am. Math. Soc.* (1945), 51, pp. 469-492.
[3] ARTIN, *Theory of algebraic numbers.* Göttingen (1959).
[4] ARTIN-TATE, *Class field theory.* Harvard (1960).
[5] WEISS, *Algebraic number theory.* McGraw-Hill (1963).
[6] LANG, *Algebraic numbers.* Addison-Wesley (1964).
[7] BOREVICH-SHAFAREVICH, *Number theory.* Academic Press (1966).
[8] CASSELS-FRÖHLICH, *Algebraic number theory.* Academic Press (1967).
[9] WEIL, *Basic number theory.* Springer (1967).
[10] SAMUEL, *Théorie algébrique des nombres.* Hermann (1967).

Faculté des Sciences de Grenoble
Institut de Mathématiques pures

(Reçu le 30 julliet 1990)