DIE REDUKTIONSFORMELN VON POINCARÉ UND SCHLÄFLI

Autor(en): **Weissbach, Bernulf**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43868

DIE REDUKTIONSFORMELN VON POINCARÉ UND SCHLÄFLI

von Bernulf WEISSBACH

Auf Sphären gerader Dimension kann der Inhalt eines Simplex durch Rückgriff auf niedrigere Dimensionen bestimmt werden. Eine entsprechende allgemeine Beziehung hat zuerst Schläfli [4] auf induktivem Wege über eine Differentialformel gewonnen. Ein zweiter Beweis Schläfli's [5] stützt sich auf eine Integraldarstellung des Inhalts sphärischer Sektoren, ist aber wenig durchsichtig. In einer Formel von H. Poincaré [3] kommt der gleiche Sachverhalt nur in unterschiedlicher Gestalt zum Ausdruck. Böhm [1] und Peschl [2] haben unabhängig voneinander auf die Gleichwertigkeit der Formeln von Poincaré und Schläfli hingewiesen.

Nachfolgend sollen Beweise der erwähnten Reduktionsformeln mitgeteilt werden, die besonders einfach erscheinen. Sie nutzen die von Erhard Schmidt verwendete Darstellung des Inhalts sphärischer Gebiete und kombinatorische Identitäten.

Rechtwinklige Koordinaten im n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathfrak{R}_n$ $(n>1)$ werden zur einspaltigen Matrix $\mathfrak{r}$ zusammengefasst. Betrachtet werden Teilgebiete $\mathfrak{S}^{(n)}_{i_1\ldots i_k}$, $\{i_1 \ldots i_k\} \subset \{1\ldots n\}$, $1 \leqq k \leqq n$ der Sphäre $\mathfrak{S}^{(n)}$, $\mathfrak{r} \in \mathfrak{S}^{(n)} \sim \mathfrak{r}'\mathfrak{r} = 1$ unter denen ein Simplex $\mathfrak{S}^{(n)}_{1\ldots n}$ enthalten ist:

$$\mathfrak{r} \in \mathfrak{G}^{(n)}_{i_1 \ldots i_k} \sim \mathfrak{r}'\mathfrak{r} = 1,\ C_{i_1}\mathfrak{r} > 0, \ldots, C_{i_k}\mathfrak{r} > 0 \tag{1}$$

$$C_i = [c_{i1} \ldots c_{in}],\ c_{ij}^2 \geqq 0,\ \left\|c_{ij}\right\| \neq 0 \tag{1''}$$

Das Simplex $\mathfrak{S}^{(n)}_{1\ldots n}$ ist Teil aller übrigen Gebiete.

Für festes k werden die Inhalte $S^{(n)}_{i_1 \ldots i_k}$ dieser Gebiete zusammengefasst zu:

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} S^{(n)}_{i_1 \ldots i_k} = v_k \qquad (1 \leqq k \leqq n) \tag{2}$$

(Zu summieren ist über alle k-reihigen geordneten Zeigerfolgen aus $\{1\ldots n\}$)

Diese Festsetzung möge noch durch

$$S^{(n)} = 2 \,.\, \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]} = v_0 \tag{2''}$$

ergänzt werden, $(v_1 = n \,.\, \frac{v_0}{2})$.

Ist G der Inhalt eines messbaren Gebietes G auf der Sphäre $\mathfrak{S}^{(n)}$, $\bar{G}$ der Kegel der vom Ursprung ausgehenden und G treffenden Halbgeraden und $f(w)$ eine integrierbare Funktion—

$$0 < \left| \int\limits_0^\infty r^{n-1} f(r^2)\, dr \right| < \infty$$

so kann G über

$$G \int\limits_0^\infty r^{n-1} f(r^2)\, dr = \int\limits_{\mathfrak{G}} f(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})\, d\mathfrak{r}; \qquad d\mathfrak{r} = dx_1 \ldots dx_n \tag{3}$$

dargestellt werden. Demzufolge gilt für das Simplex $\mathfrak{S}^{(n)}_{1\ldots n}$ und die allgemeineren Gebiete $\mathfrak{S}^{(n)}_{i_1 \ldots i_k}$:

$$S^{(n)}_{i_1 \ldots i_k} = \int\limits_{C_{i_1}\mathfrak{x} > 0, \ldots, C_{i_k}\mathfrak{x} > 0} \bar{f}(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})\, d\mathfrak{r}$$

$$\left[\int\limits_0^\infty r^{n-1} f(r^2)\, dr \right]^{-1} .\, f(w) = \bar{f}(w) \tag{4}$$

Spiegelung von $\mathfrak{S}_{i_1 \ldots i_k}^{(n)}$ am Ursprungführt auf die gleichwertige Darstellung

$$S^{(n)}_{i_1 \ldots i_k} = \int\limits_{C_{i_1}\mathfrak{x} < 0, \ldots, C_{i_k}\mathfrak{x} < 0} \bar{f}(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})\, d\mathfrak{r} \tag{4*}$$

Soll in (4) bzw. (4*) die Integration nicht nur über den jeweiligen Kegel sondern über den ganzen Raum $\mathfrak{R}_n$ erstreckt werden, so ist der Integrand derart abzuändern, dass er ausserhalb des Kegels verschwindet, während er im Innern erhalten bleibt. Das kann durch Einbau von Sprungfunktionen bewirkt werden. Mit

$$\mathfrak{v}(x) = -\mathfrak{v}(-x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ \frac{-1}{2} & ; x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

führt (4) bzw. (4*) auf

$$S^{(n)}_{i_1 \ldots i_k} = \int\limits_{\mathfrak{R}_n} \bar{f}(\mathfrak{r}'\mathfrak{r}) \prod_{\nu = i_1 \ldots i_k} \left[\frac{1}{2} \overset{+}{\underset{(-)}{}} \mathfrak{v}(C_\nu \mathfrak{r})\right] d\mathfrak{r} \qquad 1 \leq k \leq n \tag{6}$$

Hierzu tritt noch im Falle des leeren Produkts

$$S^{(n)} = \int\limits_{\mathfrak{R}_n} \bar{f}(\mathfrak{r}'\mathfrak{r})\, d\mathfrak{r} \tag{6*}$$

Zum Wert des Integrals (6) trägt nur der gerade Anteil des Integranden bei. Darin kann der Ursprung der Reduktionsformeln gesehen werden, die jetzt leicht zu gewinnen sind.

Wird die für beliebige z_ν gültige Identität

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left[\frac{1}{2} - z_\nu\right] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \prod_{\nu = i_1 \ldots i_k} \left(\frac{1}{2} + z_\nu\right) \tag{7}$$

— für $k = 0$ ist 1 als Summand zu setzen — angewandt auf das Produkt in

$$v_n = S^{(n)}_{1 \ldots n} = \int\limits_{\mathfrak{R}_n} \bar{f}(\mathfrak{r}'\mathfrak{r}) \prod_{\nu=1}^{n} \left[\frac{1}{2} - \mathfrak{v}(C_\nu \mathfrak{r})\right] d\mathfrak{r}$$

so erhält man nach Austausch von Integration und Summation über (6,6*) und (2,2*) sofort:

$$v_n \left[1 + (-1)^{n+1}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} v_k \tag{8}$$

Das ist im wesentlichen die von Poincaré angegebene Beziehung. Im allgemeinen wird sie nicht — wie hier — als Gleichung zwischen den Inhalten sphärischer Gebiete formuliert, sondern für die Grössen $\frac{v_k}{v_0}$, $k = 0 \ldots n$, angegeben. Für $n = 2m + 1$ kann nach (8) $S_{1 \ldots 2m+1}^{(2m+1)}$ aus allen v_k, $0 \leqq k \leqq 2m$, bestimmt werden.

Benutzt man, für $n = 2m + 1$, zur Zerlegung des Produkts die weniger bekannte Identität

$$\prod_{\nu=1}^{2m+1}\left[\frac{1}{2}+z_\nu\right] = \sum_{k=0}^{m}\frac{(2^{2k+2}-1)}{k+1}B_{2k+2}\sum_{i_1<\ldots<i_{2m-2k}}\prod_{\nu=i_1\ldots i_{2m-2k}}\left(\frac{1}{2}+z_\nu\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{m}2^{-2k}\overset{*}{B}_{2k}\sum_{i_1<\ldots<i_{2m+1-2k}}\prod_{\nu=i_1\ldots i_{2m+1-k}} z_\nu \tag{9}$$

(B_{2k} die Bernoullischen $-B_{2k}^*$ die Eulerschen Zahlen; 1 für das leere Produkt), so ergibt sich auf dem gleichen Wege, da Anteile abgespaltet werden, die ohne Einfluss auf den Wert des Integrals sind:

$$v_{2m+1} = \sum_{k=0}^{m}\frac{(2^{2k+2}-1)}{k+1}B_{2k+2}\, v_{2m-2k} \tag{10}$$

Bei Schläffi [5, p. 38] findet man die entsprechende Gleichung für die Grössen $2^k\frac{v_k}{v_0}$ (Statt der Gebiete $\mathfrak{G}_{i_1\ldots i_k}^{(n)}$ werden dort die Sektoren $C_{i_1}\mathfrak{r} > 0, \ldots, C_{i_k}\mathfrak{r} > 0$; $\mathfrak{r}'\mathfrak{r} \leqq 1$ betrachet). Wie Schläfli hervorhebt ist $S_{i_1\ldots i_k}^{(n)}$,$1 < k < n$ dem Inhalt eines Simplex auf der Sphäre $\mathfrak{S}^{(k)}$ des $\mathfrak{R}^{(k)}$ proportional.

Recht leicht lässt sich auch diese Aussage aus (4) gewinnen — mit $f(w) = e^{-w}$ kann nach einer geeigneten orthogonalen Transformation über $n-k$ Veränderliche, die dann nur noch im Exponenten auftreten, integriert werden.

Sowohl nach Schläflis als auch nach Poincarés Formel ist es mithin möglich $S_{1\ldots 2m+1}^{(2m+1)}$ durch Rückgriff auf niedrigere Dimensionen zu ermitteln.

LITERATUR

[1] Böhm, J. Untersuchung des Simplexinhalts in Räumen konstanter Krümmung beliebiger Dimensionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 202 (1959), S. 16-51.

[2] Peschl, P. Winkelrelationen am Simplex und die Eulersche Charakteristik. *Sitzungsberichte der math.-nat. Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften* (1955). S. 319-345.

[3] Poincaré, M. H. Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* (1) 140 (1905). S. 78-80.

[4] Schäfli, L. *Gesammelte math. Abhandlungen 1 (Theorie der vielfachen Kontinuität aus dem Jahre* 1852*). Basel* (1950). S. 227 ff.

[5] Schäfli, L. *Gesammelte math. Abhandlungen 3 Basel* (1956). S. 21-39.

B. Weissbach
301 Magdeburg
Adofstr. 4

(Reçu le 10 Avril 1970)