2. Relations entre transpositions.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

2. *Relations entre transpositions.*

Un résultat fondamental de la théorie des permutations est que le cas B) ne peut se présenter. Nous allons d'abord esquisser une démonstration directe, mais laborieuse. Nous avons déjà rappelé que le groupe S_n est engendré par $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$; de plus, on établit facilement les relations suivantes entre ces transpositions

$$(3_a) \qquad \pi_i^2 = \varepsilon \qquad \text{pour } 1 \leqq i \leqq n-1$$

$$(3_b) \qquad (\pi_i \pi_{i+1})^3 = \varepsilon \qquad \text{pour } 1 \leqq i \leqq n-2$$

$$(3_c) \qquad (\pi_i \pi_j)^2 = \varepsilon \qquad \text{lorsque } | i-j | \geqq 2\,.$$

Compte tenu de $\pi_i^2 = \varepsilon$, on peut écrire (3_b) et (3_c) sous la forme suivante qui est plus avantageuse

$$(3_b') \qquad \pi_i \pi_{i+1} \pi_i = \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1} \qquad \text{pour } 1 \leqq i \leqq n-2$$

$$(3_c') \qquad \pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i \qquad \text{lorsque } | i-j | \geqq 2\,.$$

L'existence de ces relations permet la transformation des produits de transpositions π_i. Dans un produit de telles transpositions, on peut, sans en changer la valeur, effectuer les opérations suivantes:

a) supprimer deux termes égaux qui se suivent, ou au contraire insérer deux nouveaux termes consécutifs égaux;

b) remplacer un produit partiel du type $\pi_i \pi_{i+1} \pi_i$ par $\pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1}$ sans toucher aux autres termes (les trois termes modifiés doivent être consécutifs);

c) déplacer un terme π_i vers la gauche ou la droite, pourvu qu'il n'ait pas à sauter par-dessus π_{i-1} ou π_{i+1}.

Un théorème classique, dû à Moore (1897), affirme que les relations (3_a), $(3_b')$ et $(3_c')$ suffisent à engendrer toutes les relations entre $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ dans S_n (cf. Burnside, [3], note C). Cela signifie que si les produits de deux suites de π_i représentent la même permutation, on passe de l'un à l'autre par une suite de transformations des types a), b) et c).

Illustrons ceci par un exemple. Nous considérons les deux produits

$$A = \pi_2 \pi_1 \pi_3 \pi_6 \pi_2 \pi_3 \pi_1 \pi_6 \pi_3 \pi_4 \pi_3 \pi_6 \pi_5 \pi_4 \pi_7$$
$$B = \pi_6 \pi_7 \pi_3 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$$

dans le groupe S_8. L'évaluation de ces produits est faite dans les deux tableaux suivants et obéit aux règles usuelles: le produit est effectué de la droite vers la gauche, une opération π_i fait passer d'une ligne à la suivante en échangeant les nombres i et $i+1$ (mais non pas les termes de rang i et $i+1$).

Calcul de A

	1 2 3 4 5 6 7 8
π_7	1 2 3 4 5 6 8 7
π_4	1 2 3 5 4 6 8 7
π_5	1 2 3 6 4 5 8 7
π_6	1 2 3 7 4 5 8 6
π_3	1 2 4 7 3 5 8 6
π_4	1 2 5 7 3 4 8 6
π_3	1 2 5 7 4 3 8 6
π_6	1 2 5 6 4 3 8 7
π_1	2 1 5 6 4 3 8 7
π_3	2 1 5 6 3 4 8 7
π_2	3 1 5 6 2 4 8 7
π_6	3 1 5 7 2 4 8 6
π_3	4 1 5 7 2 3 8 6
π_1	4 2 5 7 1 3 8 6
π_2	4 3 5 7 1 2 8 6

Calcul de B

π_4	1 2 3 4 5 6 7 8
π_3	1 2 3 5 4 6 7 8
π_2	1 2 4 5 3 6 7 8
π_1	1 3 4 5 2 6 7 8
π_5	2 3 4 5 1 6 7 8
π_4	2 3 4 6 1 5 7 8
π_3	2 3 5 6 1 4 7 8
π_2	2 4 5 6 1 3 7 8
π_3	3 4 5 6 1 2 7 8
π_7	4 3 5 6 1 2 7 8
π_6	4 3 5 6 1 2 8 7
	4 3 5 7 1 2 8 6

On voit donc que A et B sont tous deux égaux à la permutation $\binom{1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8}{4\;3\;5\;7\;1\;2\;8\;6}$. Nous indiquons maintenant par un tableau une suite de transformations faisant passer de A à B; nous avons omis d'inscrire les π dans les produits, en ne gardant que les indices.

Règle

A = 2 1 3 6 2 3 1 6 3 4 3 6 5 4 7

c

2 1 3 6 2 3 1 3 6 4 3 6 5 4 7

c

2 1 3 6 2 3 3 1 6 4 3 6 5 4 7

a

2 1 3 6 2 1 6 4 3 6 5 4 7

c

2 1 3 6 2 1 6 4 6 3 5 4 7

c

2 1 3 6 2 1 6 6 4 3 5 4 7

a

2 1 3 6 2 1 4 3 5 4 7

c

2 1 6 3 2 1 4 3 5 4 7

c Migration de 6 vers la gauche

2 6 1 3 2 1 4 3 5 4 7

c

6 2 1 3 2 1 4 3 5 4 7

c

6 2 1 3 2 1 4 3 5 7 4

c

6 2 1 3 2 1 4 3 7 5 4

c

6 2 1 3 2 1 4 7 3 5 4

c Migration de 7 vers la gauche

6 2 1 3 2 1 7 4 3 5 4

c

6 2 1 3 2 7 1 4 3 5 4

c

6 2 1 3 7 2 1 4 3 5 4

c

62 1 7 3 2 1 4 3 5 4

c

6 2 7 1 3 2 1 4 3 5 4

c

6 7 2 1 3 2 1 4 3 5 4

6 7 2 3 1 2 1 4 3 5 4

c

6 7 2 3 2 1 2 4 3 5 4

c

6 7 3 2 3 1 2 4 3 5 4

c

6 7 3 2 3 1 4 2 3 5 4

c

6 7 3 2 3 4 1 2 3 5 4

c

6 7 3 2 3 4 1 2 5 3 4

c

6 7 3 2 3 4 1 5 2 3 4

c Migration de 5 vers la gauche

B = 6 7 3 2 3 4 5 1 2 3 4

Montrons comment le théorème de Moore entraîne le résultat cherché sur la parité. Tout d'abord, la relation $s_{ij} = \pi_i s_{i+1,j} \pi_i$ (pour $i \leqq j-2$) entraîne par récurrence la formule

(4) $$s_{ij} = \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{j-2} \pi_{j-1} \pi_{j-2} \dots \pi_{i+1} \pi_i \qquad \text{(pour } i<j\text{)} .$$

Par suite, toute transposition est produit d'un nombre impair de générateurs π_i, et l'on peut définir les permutations paires (impaires) comme les produits d'un nombre pair (impair) de générateurs π_i. Or, une transformation de type a) appliquée à un produit de π_i augmente ou diminue de deux le nombre des facteurs, alors que ce nombre de facteurs est inchangé par les transformations de type b) ou c). Une application des transformations de type a), b) ou c) ne peut donc modifier la parité du nombre des facteurs; le théorème de Moore montre alors qu'un produit d'un nombre pair de π_i ne peut être égal à un produit d'un nombre impair de tels facteurs, donc qu'une permutation ne peut être à la fois paire et impaire.

3. *Nombre d'inversions d'une permutation.*

La démonstration du théorème de Moore est un peu délicate pour avoir sa place dans un cours élémentaire. L'intérêt de ce théorème est ailleurs; il n'est en effet que le prototype de résultats s'appliquant à une vaste classe de groupes, les groupes de Coxeter, dont on rencontre de nombreuses applications géométriques. On peut consulter à ce sujet les monographies de Coxeter et Moser [5] et de Bourbaki [2].

Les méthodes que nous allons maintenant examiner ont toutes un point commun. Par un procédé ou un autre, on associe à toute permutation s un nombre $\alpha(s)$ égal à 1 ou -1 de telle sorte que l'on ait la relation

$$\alpha(st) = \alpha(s)\,\alpha(t) \tag{5}$$

pour deux permutations s et t. Il suffit alors de prouver que $\alpha(s)$ est égal à -1 pour une transposition s, ou même simplement de prouver la formule $\alpha(\pi_i) = -1$ pour $1 \leqq i < n$; on en déduit en effet que $\alpha(s)$ est égal à 1 pour les permutations paires et à -1 pour les permutations impaires. On a ainsi distingué entre les deux espèces de permutations et indiqué un procédé de construction de la signature.

Un premier groupe de méthodes tourne autour de l'idée d'*inversion* d'une permutation. Rappelons quelques définitions: si $x_1, \ldots, x_n$ est une suite de n nombres réels distincts, une inversion de la suite est un couple extrait de la suite en question qui se trouve dérangé de l'ordre usuel; autrement dit, c'est un couple $x_i x_j$ avec $i < j$ et $x_i > x_j$. Ainsi, dans la suite 6 3 1 2 4 5, les inversions sont les couples

$$63\,,\,61\,,\,62\,,\,64\,,\,65\,,\,31\,,\,32\,.$$

Si s est une permutation, on note $N(s)$ le nombre d'inversions de la suite $s(1), \ldots, s(n)$; dans ce n°, on pose $\alpha(s) = (-1)^{N(s)}$.