Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE GÉNÉRALISATION DES SYMBOLES DE LEGENDRE-JACOBI

Kapitel: Introduction

Autor: Cartier, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43850

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 19.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES SYMBOLES DE LEGENDRE-JACOBI

par P. Cartier (Strasbourg)

Introduction

Un théorème assez peu connu (Zolotareff, Frobenius) donne une interprétation des symboles de Legendre-Jacobi au moyen de la signature de permutations convenables. Cette interprétation suggère une généralisation de ces symboles, à laquelle nous consacrons dans ces pages une étude élémentaire. Les propriétés des symboles généralisés redonnent facilement les principaux résultats classiques de Legendre, Gauss et Jacobi et nous permettront d'étendre le théorème de Zolotareff-Frobenius au cas des corps de nombres algébriques. On peut utiliser les résultats de cette Note pour donner un exposé rapide des propriétés des symboles de Legendre-Jacobi, exposé qui différerait très peu de celui de Frobenius dans [2].

Première partie

La loi de réciprocité quadratique et le lemme de Gauss-Schering

1. *Résumé des résultats classiques* (Legendre, Gauss, Jacobi).

Soient a et b deux entiers, avec $b > 0$. On dit que a est *reste quadratique modulo* b s'il existe deux entiers x et y tels que $x^2 = a + by$, autrement dit, si la classe de a est un carré dans l'anneau des entiers modulo b. Gauss note $a\,R\,b$ cette relation et $a\,N\,b$ sa négation. Soient p et q deux nombres premiers, distincts de 2 et distincts entre eux. La loi de réciprocité quadratique, conjecturée par Euler, démontrée partiellement par Legendre, et établie par Gauss en 1796, affirme qu'il n'y a que les quatre possibilités suivantes:

$$\left.\begin{matrix} p\,R\,q \text{ et } q\,R\,p \\ p\,N\,q \text{ et } q\,N\,p \end{matrix}\right\} \text{ si } p \textit{ ou } q \text{ est congru à 1 modulo 4,}$$

$$\left.\begin{matrix} p\,R\,q \text{ et } q\,N\,p \\ p\,N\,q \text{ et } q\,R\,p \end{matrix}\right\} \text{ si } p \textit{ et } q \text{ sont congrus à 3 modulo 4.}$$

Le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ est défini pour un nombre premier $p \neq 2$ et un entier a non divisible par p; il vaut 1 ou -1 selon que a est reste