

# QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Autor(en): **Berger, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE  
OU  
DEUX VARIATIONS SUR  
LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

par M. BERGER

Cet article reproduit, avec quelques développements, une conférence donnée à la réunion du groupe des mathématiciens rhodaniens, le 27 avril 1969 à Lausanne. C'est plutôt un article d'exposition, il n'apporte pas de résultats nouveaux. Après avoir défini ce qu'est une variété riemannienne (n° 1), on en donne des exemples (n° 2); parmi ceux-ci les projectifs réels, complexes, quaternioniens et le plan projectif des octaves de Cayley jouent un rôle à part. Avec les sphères, ils forment exactement la classe des espaces symétriques simplement connexes compacts de rang un. Ils servent de modèles pour les problèmes soulevés dans les deux parties (volumes-surfaces-longueurs, géodésiques) de l'article. On donne ensuite les définitions de deux invariants riemanniens géométriques très simples: les volumes (n° 3), les géodésiques (n° 8). La contemplation des projectifs donne alors lieu à des résultats (voir (4.3) et (12.2)) mais surtout à des problèmes ouverts, problèmes qui nous ont semblé intéressants.

1. *Définition des variétés riemanniennes.*

Rappelons quelques définitions. Une *variété à  $n$  dimensions*  $M$  est un espace topologique séparé qui peut être recouvert par des ensembles ouverts homéomorphes à des ouverts de  $\mathbf{R}^n$ . Un homéomorphisme d'un ouvert  $U$  de  $M$  sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  est appelé une *carte de domaine*  $U$ ; il associe à chaque point de  $U$  un système de  $n$  nombres réels, qu'on appelle des *coordonnées locales*. Une *structure*  $C^\infty$  sur  $M$  consiste en la donnée d'une classe privilégiée de cartes ou systèmes de coordonnées locales, dont les domaines recouvrent toujours  $M$ , jouissant de la propriété suivante: si les domaines  $U$  et  $U'$  de deux systèmes de cette classe empiètent, les coordonnées d'un point de  $U \cap U'$  dans l'un des systèmes sont toujours des fonctions  $C^\infty$  (c'est-à-dire indéfiniment différentiables de ses coordonnées dans l'autre système). Une *variété*  $C^\infty$  (ou variété différentiable de classe  $C^\infty$ ) est une variété munie d'une structure  $C^\infty$ . Toutes les variétés consi-

dérées ici seront  $C^\infty$  et les coordonnées locales utilisées seront toujours de la classe privilégiée.

Si  $M$  et  $M'$  sont deux variétés, une application continue  $f$  de  $M$  dans  $M'$  est dite  $C^\infty$ , si les coordonnées locales dans  $M'$  de l'image  $f(m)$  d'un point  $m$  de  $M$  sont des fonctions  $C^\infty$  des coordonnées locales de  $m$  dans  $M$ . Si  $f$  est bijective et si son inverse  $f^{-1}$  est aussi  $C^\infty$ , on dit que  $f$  est un *difféomorphisme*.

Un *vecteur tangent* à  $M$  au point  $m$  est défini, relativement à un système de coordonnées locales  $u_1, \dots, u_n$  dans un voisinage de  $m$ , par un système de valeurs des différentielles  $du_1, \dots, du_n$ . Relativement à un autre système de coordonnées locales  $v_1, \dots, v_n$  dans un voisinage du même point  $m$ , le même vecteur est défini par les valeurs correspondantes des différentielles  $dv_1, \dots, dv_n$ , qui sont bien déterminées puisque les  $v_i$  sont fonctions  $C^\infty$  des  $u_j$ . Le fait que  $dv_i$  est linéaire en les  $du_j$  entraîne que l'ensemble de tous les vecteurs tangents à  $M$  en  $m$  est muni d'une structure d'espace vectoriel et forme ainsi un espace vectoriel de dimension  $n$ ; il est appelé *l'espace tangent* à  $M$  en  $m$  et noté  $T_m M$ .

L'ensemble  $TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$ , réunion de tous les  $T_m M$ , est canoniquement muni d'une structure topologique et d'une structure  $C^\infty$ , telles que, si  $u_1, \dots, u_n$  sont des coordonnées locales dans l'ouvert  $U$  de  $M$ ,  $TU = \bigcup_{m \in U} T_m M$  est un ouvert de  $TM$  homéomorphe à  $U \times \mathbf{R}^n$  et  $u_1, \dots, u_n, du_1, \dots, du_n$  sont des coordonnées locales dans  $TU$ . La variété  $TM$ , appelée *l'espace tangent* à  $M$ , est en plus munie d'une structure d'espace fibré vectoriel, les fibres de  $TM$  étant les  $T_m M$ .

A toute application  $C^\infty$  de la variété  $M$ , de dimension  $n$ , dans une autre variété  $M'$ , de dimension  $p$ ,  $f: M \rightarrow M'$ , est canoniquement associée une application de  $TM$  dans  $TM'$ , appelée *l'application tangente* à  $f$  et notée  $T(f)$ . Elle est définie de la manière suivante: si  $x$  est un vecteur tangent à  $M$  en  $m$ , défini relativement à des coordonnées locales  $u_1, \dots, u_n$  par un système de valeurs de  $du_1, \dots, du_n$ , son image  $T(f)(x)$  est le vecteur tangent à  $M'$  en  $m' = f(m)$  défini, relativement à des coordonnées locales  $v_1, \dots, v_p$  dans un voisinage de  $m'$ , par les valeurs correspondantes de  $dv_1, \dots, dv_p$ , valeurs bien déterminées puisque les  $v_i$  sont fonctions  $C^\infty$  des  $u_j$ . Cette application  $T(f)$  est  $C^\infty$ , de plus, sa restriction à  $T_m M$ , qu'on notera  $T_m(f)$ , est une application linéaire de  $T_m M$  dans  $T_m M'$ .

Une forme différentielle quadratique sur  $M$  est représentée, dans le domaine d'un système de coordonnées locales  $u_1, \dots, u_n$ , par une expression telle que

$$\sum_{i,j} g_{ij} du_i du_j \quad (g_{ij} = g_{ji})$$

où les  $g_{ij}$  sont des fonctions de  $u_1, \dots, u_n$ . Si, pour tous les systèmes de coordonnées locales, ces coefficients sont des fonctions  $C^\infty$ , on dit que la forme est  $C^\infty$ . Une *structure riemannienne* (s.r.) sur  $M$  n'est pas autre chose qu'une forme différentielle quadratique  $g$  sur  $M$ , *définie positive*, et  $C_\infty$ . La forme bilinéaire symétrique associée permet de définir le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  tangents au même point  $m$  de  $M$  et induit une structure euclidienne dans  $T_m M$ . On notera ce produit scalaire  $g(x, y)$  et l'on écrira

$$|x| = (g(x, x))^{1/2}.$$

Par *variété riemannienne* (v.r.) on entend un couple  $(M, g)$  formé d'une variété  $M$  et d'une s.r. sur  $M$ . Une isométrie entre deux v.r.  $(M, g), (M', g')$  est un difféomorphisme  $f: M \rightarrow M'$  tel que  $f^* g' = g$  (où  $(f^* g')(x, y) = g'(T(f)(x), T(f)(y))$ ). On dira que  $(M, g), (M', g')$  sont *isométriques* s'il existe entre elles une isométrie.

Pour le lecteur non spécialiste, nous avons donné, parfois simultanément, trois références: [13], [12], [1]. La référence [13] est donnée parce que son chapitre II fournit une initiation très rapide à la géométrie riemannienne; [12] est donnée car c'est un ouvrage de référence récent et très complet. Enfin [1] pourra être agréable comme contenant la plus grande partie des définitions, exemples et résultats de cet article, ceci en détail.

## 2. Exemples de variétés riemanniennes.

### (2.1): l'espace euclidien $(\mathbf{R}^n, g_0)$ .

Soit  $E$  un espace euclidien quelconque, dont  $(\cdot | \cdot)$  désigne le produit scalaire; on en déduit sur  $E$  une s.r. canonique  $g_0$ : en effet l'espace tangent  $T_e E$  à  $E$  en  $e$  s'identifie canoniquement par une application  $\tau_e$  à  $E$  lui-même. On définira donc  $g_0$  par  $g_0(x, y) = (\tau_e(x) | \tau_e(y))$  pour tous  $x, y \in T_e E$ . Pour  $\mathbf{R}^n$ , muni de son produit scalaire canonique, on obtient donc ainsi une v.r.  $(\mathbf{R}^n, g_0)$ .

### (2.2):

Soit  $f: M \rightarrow N$  une application différentiable et  $h$  une s.r. sur  $N$ . Si l'application tangente à  $f$ ,  $T(f): TM \rightarrow TN$  est telle que, quel que soit  $m$ ,  $T_m(f)$  est *injective*, alors  $g = f^* h$  est une s.r. sur  $M$ . En effet  $f^* h$  est



toujours symétrique bilinéaire et elle est définie positive:  $\forall x \neq 0 : g(x, x) = (f^* h)(x, x) = h(T(f)(x), T(f)(x)) > 0$  puisque  $T(f)(x) \neq 0$  car  $T(f)$  injective. Deux cas particuliers de cette situation:

(2.3):

Soit  $(N, h)$  une v.r. et  $M \subset N$  une sous-variété de  $N$ . Si  $i : M \rightarrow N$  est l'injection canonique,  $i^*h = g$  est donc une s.r. sur  $M$ , qu'on notera indifféremment  $(M, h)$  ou  $(M, h|_M)$ . Exemples:

(2.3.1): soit  $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x|=1\}$  la sphère de dimension  $n$ ; de (2.1) et (2.3) on déduit une s.r. canonique  $g_0$  sur  $S^n$ :  $(S^n, g_0)$ .

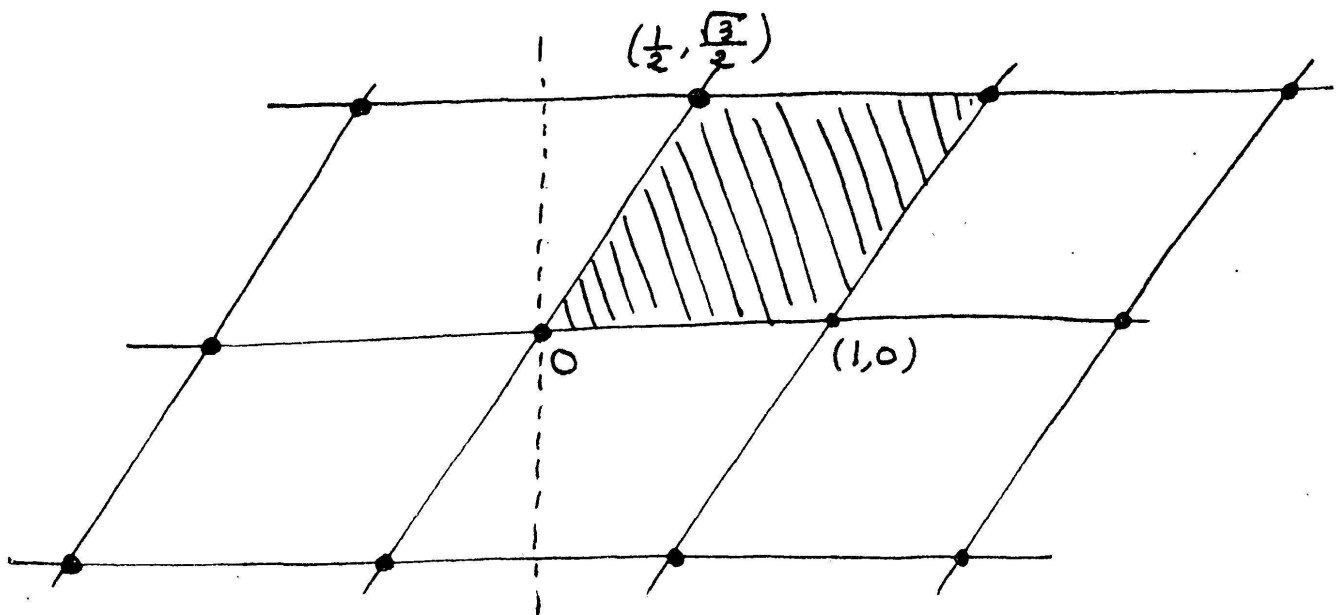
(2.3.2): le cas où  $S$  est une sous-variété de dimension deux de  $\mathbf{R}^3$  (surface), pour  $(\mathbf{R}^3, g_0)$ , conduit au premier exemple historique de v.r.;  $g_0|_S$  n'est autre que la « première forme fondamentale » de  $S$ .

(2.4):

Soit  $M \xrightarrow{p} N$  un revêtement,  $h$  une s.r. sur  $N$ . On a donc sur  $M$  la s.r.  $g = p^*h$ ; on dit alors que  $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$  est un *revêtement riemannien*. Du point de vue constructif, c'est plutôt la situation inverse que l'on rencontre: soit  $(M, g)$  une v.r. et  $G$  un groupe d'isométries discret sans point fixe de  $(M, g)$  et tel que l'application quotient  $M \xrightarrow{p} M/G = N$  soit un revêtement. Alors il existe sur  $N$  une s.r. unique  $h = g/G$  telle que  $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$  soit un revêtement riemannien. Exemples:

(2.4.1):  $G$  est le groupe à deux éléments d'isométries de  $(S^n, g_0)$  formé par l'identité et l'antipodie. La variété quotient n'est autre que  $S^n/G = P^n(\mathbf{R})$ , l'espace projectif réel de dimension  $n$ ; le revêtement est évidemment à deux feuillets. D'où sur  $P^n(\mathbf{R})$  une s.r. canonique, c'est  $(P^n(\mathbf{R}), g_0)$  (appelé parfois espace elliptique).

(2.4.2):  $G$  est un réseau de  $\mathbf{R}^n$  (sous-groupe discret de rang maximum, donc isomorphe à  $\mathbf{Z}^n$ ). La variété quotient  $\mathbf{R}^n/G$  est le tore  $(S^1)^n$  de dimension  $n$ . On obtient ainsi des v.r.  $(\mathbf{R}^n/G, g_0/G)$  appelées *tores plats*; ainsi nommées parce qu'elles sont toujours localement isométriques à  $(\mathbf{R}^n, g_0)$ . Pour  $n = 2$ , le tore plat  $(\mathbf{R}^2/G, g_0/G)$  est dit *équilatéral* si  $G$  est déduit, par une isométrie de  $\mathbf{R}^2$ , du réseau  $G_0$  engendré par les deux vecteurs  $(1, 0)$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ :



(2.5): *submersions riemanniennes.*

Soient  $M, N$  deux variétés et  $M \xrightarrow{P} N$  une *submersion*, i.e.  $\forall m \in M : T_m(p)$  est de rang égal à  $\dim N$ . On peut alors définir en  $m \in M$  le sous-espace tangent *vertical*  $V_m$  de  $T_m(M)$ , à savoir le noyau  $V_m = T_m(p)^{-1}(0)$ . Si de plus  $g$  est une s.r. sur  $M$ , le sous-espace euclidien  $T_m(M)$  admet une décomposition orthogonale  $T_m(M) = V_m \oplus H_m$ ; le sous-espace  $H_m$  est dit *horizontal*. Noter que la restriction de  $T_m(p)$  à  $H_m$  est un isomorphisme d'espace vectoriels  $H_m \rightarrow T_{p(m)}(N)$ . Soient enfin  $(M, g), (N, h)$  deux v.r. On dit que  $(M, g) \xrightarrow{P} (N, h)$  est une *submersion riemannienne* si  $p$  est une submersion et si  $\forall m \in M : T_m(p) : H_m \rightarrow T_{p(m)}(N)$  est une isométrie d'espaces euclidiens. Les revêtements riemanniens (2.4) en sont un exemple. Plus généralement on est sûr, étant donnés  $(M, g)$  et une submersion  $M \xrightarrow{P} N$ , de pouvoir construire une s.r.  $h$  sur  $N$  telle que  $(M, g) \xrightarrow{P} (N, h)$  soit une submersion riemannienne, lorsque  $N = M/G$  où  $G$  est un groupe d'isométries de  $(M, g)$ ; car alors en effet les applications tangentes aux opérations de  $G$  sur une fibre  $p^{-1}(n), n \in N$ , permutant transitivement et isométriquement les  $T_m M$ , donc les  $H_m (m \in p^{-1}(n))$ , on pourra définir  $h_n$  par la condition «  $\forall m \in p^{-1}(n) : T_m(p) : H_m \rightarrow T_n N$  est une isométrie d'espaces euclidiens ». En voici deux cas particuliers, fondamentaux pour la suite:

(2.5.1): *espace projectif complexe  $(P^n(\mathbb{C}), g_0)$ .*

Soit  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{P} P^n(\mathbb{C})$  l'espace projectif complexe de dimension (complexe)  $n$ , défini comme quotient de  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  par la relation d'équivalence «  $xRy$  » si  $\exists z \in \mathbb{C} : y = zx$ . On munit  $\mathbb{C}^{n+1}$  de sa structure hermitienne canonique  $|z|^2 = |(z_0, \dots, z_n)|^2 = \sum_i z_i \bar{z}_i$ . On obtient encore  $P^n(\mathbb{C})$

en restreignant  $p$  à  $S^{2n+1} = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} : |z|^2 = 1\} : S^{2n+1} \xrightarrow{P} P^n(\mathbf{C})$  (c'est la fibration de Hopf). En outre  $P^n(\mathbf{C})$  apparaît comme le quotient  $S^{2n+1}/U$  de  $S^{2n+1}$  par le groupe  $U = \{z \cdot id_{\mathbf{C}^{n+1}}, |z|=1\}$  des homothéties de rapport de module égal à 1. Comme  $U(1) \subset O(2n+2)$ ,  $U$  consiste en isométries de  $(S^{2n+1}, g_0)$  d'où: *il existe sur  $P^n(\mathbf{C})$  une s.r. canonique  $g_0$ , telle que  $(S^{2n+1}, g_0) \xrightarrow{P} (P^n(\mathbf{C}), g_0)$  soit une submersion riemannienne.*

**(2.5.2):** *espace projectif quaternionien  $(P^n(\mathbf{H}), g_0)$ .*

On procède exactement de même, en remplaçant le corps  $\mathbf{C}$  des nombres complexes par le corps  $\mathbf{H}$  des quaternions,  $U$  par  $Sp(1) = \{z \cdot id_{\mathbf{H}^{n+1}}, |z|=1, z \in \mathbf{H}\}$ , le groupe de Lie compact (homéomorphe à  $S^3$ ) des quaternions de module égal à 1. L'espace  $\mathbf{H}^{n+1}$  est muni de sa structure hermitienne canonique  $\sum_i z_i \bar{z}_i$ . On obtient sur  $P^n(\mathbf{H}) = S^{4n+3}/Sp(1)$  une s.r. canonique  $g_0$  telle que  $(S^{4n+3}, g_0) \xrightarrow{P} (P^n(\mathbf{H}), g_0)$  soit une submersion riemannienne.

**(2.6):** *espaces homogènes.*

Si l'on sait qu'il existe aussi un plan projectif des octaves de Cayley  $P^2(\mathbf{Ca})$  (mais pas de  $P^n(\mathbf{Ca})$  pour les  $n \geq 3$ ), on désirerait construire de même une s.r. canonique sur ce  $P^2(\mathbf{Ca})$ . Cela est impossible car il n'existe pas d'application convenable  $S^{23} \rightarrow P^2(\mathbf{Ca})$ ; il faut employer un autre procédé de construction, celui des espaces homogènes.

**(2.6.1):** *soit  $G$  un groupe de Lie et  $H$  un sous-groupe compact de  $G$ . Alors il existe sur  $M = G/H$  des s.r.  $G$ -invariantes, c'est-à-dire telles que toutes les opérations de  $G$  soient des isométries.*

C'est une affaire sans malice; on veut définir  $g_m$ ,  $m \in M$ . Soit  $G \xrightarrow{P} G/H = M$  et  $e = p(H)$ . On pense à définir  $g_m$  à partir d'une  $g_e$  fixe sur  $T_e M$  et des applications tangentes  $T(\gamma)$  des actions  $\gamma$  de  $G$  sur  $M$ , qui devront être des isométries d'espaces euclidiens. Ce sera possible si c'est cohérent, c'est-à-dire si  $\forall \gamma \in H : T_e(\gamma)$  est une isométrie de  $T_e M$ . C'est possible puisque  $H$  est compact: prendre  $g'_e$  structure euclidienne quelconque sur  $T_e M$  et faire la moyenne  $g_e$ , pour la mesure de Haar de  $H$ , des  $\gamma^* g'_e$ . Cette moyenne est bien  $T_e(\gamma)$ -invariante pour tout  $\gamma \in H$ ; ensuite on transporte  $g_e$  en  $m$  quelconque de  $M$  par une  $T_e(\gamma)$  où  $\gamma$  est tel que  $\gamma(e) = m$ .

**(2.6.2):** *en outre, si  $H$ , par les  $T_e(\cdot)$ , agit irréductiblement sur  $T_e M$ , alors  $M$  possède, à un scalaire positif près, une seule s.r.  $G$ -invariante.*

Ceci provient simplement de ce qu'un groupe linéaire irréductible ne peut pas laisser invariantes deux formes quadratiques définies positives non proportionnelles; pour le voir, réduire l'une de ces formes par rapport à l'autre.

Par exemple (2.6.2) nous tranquillise, lorsque nous pensions à écrire les sphères, les projectifs comme espaces homogènes:  $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ ,  $P^n(\mathbf{C}) = U(n+1)/U(n) \times U(1)$ ,  $P^n(\mathbf{H}) = Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1)$ . Comme les groupes d'isotropie  $H$  agissent dans tous ces cas de façon irréductible, on n'obtient pas, par cette méthode, d'autres s.r. que celles de (2.3.1), (2.5.1), 2.5.2.) (à un scalaire près).

(2.7): *le plan projectif des octaves de Cayley* ( $P^2(\mathbf{Ca})$ ,  $g_0$ ).

L'espace  $P^2(\mathbf{Ca})$ , peut être défini comme l'espace homogène  $F_4/Spin(9)$  (voir [8]);  $Spin(9)$  agit de façon irréductible d'où, sur  $P^2(\mathbf{Ca})$  une s.r. canonique (on prendra celle normée en sorte que toutes les géodésiques soient de longueur  $\pi$ , voir (9.8)): ( $P^2(\mathbf{Ca})$ ,  $g_0$ ).

Nous poserons, pour tout  $n$ :

(2.8):  $P_0^n = S^n$ ,  $P_1^n = P^n(\mathbf{R})$ ,  $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$ ,  $P_4^n = P^n(\mathbf{H})$ ,  $P_8^n = P^2(\mathbf{Ca})$ ;

Ainsi que  $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$  et  $i = \dim_{\mathbf{R}} K$ . Noter que  $\dim_{\mathbf{R}} P_1^n = i \cdot n$ . On aura donc les submersions riemanniennes:

(2.9):  $(S^{in+i-1}, g_0) \xrightarrow{P} (P_i^n, g_0)$ ,  $i = 1, 2, 4$ .

On rappelle les difféomorphismes entre  $P_i^1$  et  $S^i$  ( $i=1, 2, 4, 8$ ). En fait on a même des isométries entre

(2.10):  $(P_i^1, g_0)$  et  $(S^i, \frac{1}{4}g_0)$ ,  $i = 1, 2, 4, 8$ .

Enfin, en tant qu'espaces homogènes, les  $P_i^n$  se caractérisent comme étant exactement l'ensemble des espaces symétriques de rang égal à 1: [11], p. 354 et ii. Ces  $(P_i^n, g_0)$  vont servir de modèles à une grande partie de ce qui suit.

## VOLUMES, SURFACES, LONGUEUR

### 3. Définitions.

Le fait simple et fondamental est:

(3.1): *une v.r.  $(M, g)$  admet une mesure canonique,  $v_g$ .*

Heuristiquement, ceci vient de ce qu'un espace euclidien admet une mesure canonique (la mesure de Lebesgue pour  $\mathbf{R}^n$ ), et comme  $(M, g)$  est

partout infinitésimalement un espace euclidien, on a gagné. Plus précisément: pour un espace vectoriel euclidien, on prend une orientation quelconque et soit  $n$  la dimension de cet espace  $E$ ; il existe alors sur  $E$  une  $n$ -forme alternée canonique,  $\omega$ ; elle vaut  $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$  sur toute base ortho-normée directe  $\{e_i\}$  de  $E$  (ce qui a un sens parce que le déterminant d'une rotation est égal à 1). On peut aussi trouver  $\omega$  en remarquant que  $\wedge^n E$ , d'une part est euclidien, d'autre part est de dimension un, donc possède un vecteur unique de norme un correspondant à l'orientation choisie pour  $E$ ; c'est  $\omega$ . Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne,  $U$  un ouvert domaine d'une carte; fixons une orientation sur  $U$ . D'après ce qui précède il existe sur  $U$  une  $n$ -forme canonique ( $n = \dim M$ )  $m \mapsto \omega_m$ . Pour  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  à support dans  $U$  on pose  $\int_M f v_g = \int_U f \omega$ , au sens de l'intégrale sur une variété orientée d'une forme alternée de degré maximum. Il n'y a plus qu'à remarquer que la valeur  $\int_U f \omega$  ne change pas si l'on change l'orientation de  $U$ , puis que  $v_g$  se définit pour des fonctions à support compact quelconque à l'aide de partitions de l'unité.

(3.2): soit  $(M, g)$  une v.r. compacte. Le volume de  $(M, g)$  est  $\text{vol}(M, g) = \int_M v_g$ , c'est-à-dire la masse totale de  $(M, g)$  pour sa mesure canonique; si  $\dim M = 1$ , on dit longueur et écrit  $\text{long}(M, g)$ , si  $\dim M = 2$ , on dit surface et écrit  $\text{surf}(M, g)$ .

On peut calculer explicitement  $\text{vol}(P_i^n, g_0)$  pour tous  $n, i$ : voir le tableau. Pour  $S^n$ , c'est un vieux résultat. On passe de là à  $P_1^n$ , revêtu à deux feuilletés par  $S^n$ , en divisant par deux.

Par trivialisations locales et le théorème de Fubini on voit que:

(3.3): soit  $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$  une submersion riemannienne, qui est une fibration et supposons  $M$  compacte. Alors

$$\text{vol}(M, g) = \int_{n \in N} \text{vol}(p^{-1}(n), g) \cdot v_h.$$

Appliquons ceci à  $P_2^n$  (resp.  $P_4^n$ ), pour  $g_0$  bien sûr. Les fibres sont des grands cercles (resp. des sous-sphères de dimension trois) de  $S^{2n+1}$  (resp.  $S^{4n+3}$ ), fibres ayant toutes même longueur (resp. volume) égale à  $2\pi$  (resp. égal à  $2\pi^2$ , voir tableau). D'où les valeurs de la première ligne du tableau.

Pour  $(P_8^2, g_0)$ , il faut employer d'autres méthodes; on en trouvera une dans [1], p. 209.

Si  $N \subset M$  est une sous-variété de  $(M, g)$ , on posera (voir (2.3)):

(3.4)  $\text{vol}(N, g) = \text{vol}(N, g|_N).$

Soit  $c : [a, b] \rightarrow M$  une courbe d'une v.r.  $(M, g)$ ; même si  $c([a, b])$  n'est pas une sous-variété de  $M$  on peut définir la longueur de  $c$  par :

$$(3.5) \quad \text{long}(c, g) = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

*Exemple :* soit  $(M, g) \xrightarrow{P} (N, h)$  une submersion riemannienne; une courbe  $c$  de  $M$  sera dite *horizontale* si  $c'(t) \in H_{c(t)}$  pour tout  $t$ . Des définitions (2.5) et (3.5) on déduit :

(3.6):  $\text{long}(p \circ c, h) \leq \text{long}(c, g)$ ; en outre  $\text{long}(p \circ c, h) = \text{long}(c, g)$  si et seulement si  $c$  est horizontale.

#### 4. Le théorème de Pu.

Avec cette seule notion de volume se posent déjà des problèmes naturels, loin d'être résolus en général. Commençons par un des rares cas où l'on ait un résultat. Soit  $g$  une s.r. sur  $P_1^2$ , le plan projectif réel. A  $(P_1^2, g)$  on peut attacher deux nombres réels, son volume  $\text{vol}(P_1^2, g)$  et son *carcan*,  $\text{carc}(P_1^2, g)$ , égal à la borne inférieure de la longueur des courbes fermées de  $P_1^2$  non homotopes à zéro :

$$(4.1) \quad \text{carc}(P_1^2, g) = \inf_{c \text{ non } \sim_0} \text{long}(c, g)$$

où il s'agit de l'homotopie des courbes fermées (c'est-à-dire des lacets sans point base). Il est naturel d'espérer que si  $\text{carc}(P_1^2, g) \geq k$ , alors  $\text{surf}(P_1^2, g)$  est supérieur ou égal à un nombre ne dépendant que de  $k$ . Définissons le *quotient* de  $(P_1^2, g)$  comme le rapport homogène de degré zéro :

$$(4.2) \quad \text{quot}(P_1^2, g) = \frac{\text{surf}(P_1^2, g)}{(\text{carc}(P_1^2, g))^2}.$$

La première chose à faire est de calculer  $\text{quot}(P_1^2, g_0)$ . Le tableau donne le numérateur; pour  $\text{carc}(P_1^2, g_0)$ , on utilise le théorème (13.1) et (9.1) (il est bien naturel que les plus petites courbes non homotopes à zéro de  $(P_1^2, g_0)$  soient les droites projectives!). Donc  $\text{quot}(P_1^2, g_0) = 2/\pi$  (voir tableau). L'interrogation précédente est complètement résolue par le :

(4.3): *théorème (Pu, [14]). Quel que soit la s.r.  $g$  sur  $P_1^2$ , on a  $\text{quot}(P_1^2, g) \geq \text{quot}(P_1^2, g_0)$ . En outre, si  $\text{quot}(P_1^2, g) = \text{quot}(P_1^2, g_0)$ , alors  $(P_1^2, g)$  et  $(P_1^2, g_0)$  sont isométriques.*

Esquissons la démonstration (voir [14] ou [1], p. 309). On prend le revêtement riemannien (voir (2.4))  $(S^2, \tilde{g})$  de  $(P_1^2, g)$ . D'après le théorème fondamental de la représentation conforme, appliqué à  $(S^2, \tilde{g})$ , il existe



un difféomorphisme  $f : S^2 \rightarrow S^2$  tel que  $\tilde{f} * \tilde{g} = \tilde{\alpha} \cdot g_0$ , où  $g_0$  est la s.r. canonique de  $S^2$  et  $\tilde{\alpha}$  une fonction sur  $S^2$ . On peut modifier  $f$  de façon à pouvoir passer au quotient et trouver un difféomorphisme  $f$  de  $P_1^2$  tel que  $f * g = \alpha \cdot g_0$ ,  $\alpha : P_1^2 \rightarrow \mathbf{R}$ . Les deux v.r.  $(P_1^2, g)$  et  $(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$  sont isométriques, donc ont même volumes et carcans. On est donc ramené en fait à deux s.r.  $g_0$  et  $\alpha \cdot g_0$  sur  $P_1^2$ ; maintenant  $SO(3)$  agit sur  $(P_1^2, g_0)$  par isométries; on fait la moyenne par cette action et pour la mesure de Haar de  $SO(3)$ , de la fonction  $\alpha^{1/2}$ . Ceci donne une fonction  $\bar{\alpha}$ ; la longueur d'une courbe  $c$  pour  $\bar{\alpha} \cdot g_0$  est la moyenne de la longueur des courbes  $\gamma \circ c$  pour  $\alpha \cdot g_0$ ,  $\gamma$  parcourant  $SO(3)$ ; donc  $\text{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) \geq \text{carc}(P_1^2, \alpha \cdot g)$ . L'inégalité de Schwarz (pour l'intégrale sur  $SO(3)$ ) dit que  $\text{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} g_0) \leq \leq \text{surf}(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$ . Donc  $\text{quot}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) \leq \text{quot}(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$ . Mais, en fait,  $\bar{\alpha}$  est une constante, puisque  $SO(3)$  agit transitivement sur  $P_1^2$ ; donc  $\text{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) = \bar{\alpha} \cdot \text{surf}(P_1^2, g_0)$  et  $\text{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) = (\bar{\alpha})^{1/2} \cdot \text{carc}(P_1^2, g_0)$ . D'où la première partie du théorème; la seconde se montre en suivant les égalités à la trace dans les inégalités.

*Remarques* : (i): on peut considérer (4.3) comme une espèce d'inégalité isopérimétrique (isocarcannique!) entre surface et longueur, la longueur de la frontière étant remplacée ici par le carcan pour la variété sans bord  $P_1^2$ ; (ii): (4.3) est une caractérisation plaisante de la s.r. canonique de  $P_1^2$ .

### 5. Généralisations possibles.

Pour  $n$  quelconque, on peut définir  $\text{carc}(P_1^n, g)$  exactement par la formule (4.1) et remplacer (4.2) par

$$(5.1) \quad \text{quot}(P_1^n, g) = \frac{\text{vol}(P_1^n, g)}{(\text{carc}(P_1^n, g))^n}.$$

On calcule encore avec (13.1): tableau. Par contre un analogue de (4.3) est complètement ouvert; on ne sait pas si  $\text{quot}(P_1^n, g) \geq \text{quot}(P_1^n, g_0)$  pour toute  $g$  (pour les variations conformes  $\alpha \cdot g_0$ , c'est facile, démonstration analogue à celle de (4.3): voir [14]). A fortiori on ne sait pas si l'égalité est caractéristique de  $g_0$ . En fait on ne sait même pas si la borne inférieure  $\inf_g \text{quot}(P_1^n, g)$ , pour  $g$  parcourant toutes les s.r. sur  $P_1^n$ , est strictement positive.

En fait on peut encore généraliser toutes ces questions aux  $P_i^n$ . Remarquons pour ce faire que, dans  $P_1^n$ , dire qu'une courbe  $c$  n'est pas homotope à zéro est équivalent à dire qu'elle est homotope à  $P_1^1$ , la droite projective pour l'inclusion héréditaire  $P_1^1 \subset P_1^n$ . On a aussi des inclusions  $P_i^1 \subset P_i^n$  pour tout  $i$ . Posons donc:



$$(5.2) \quad \text{carc}(P_i^n, g) = \inf_{Y \sim P_i^n} \text{vol}(Y, g), \quad \text{quot}(P_i^n, g) = \frac{\text{vol}(P_i^n, g)}{(\text{carc}(P_i^n, g))^n}.$$

La question qui se pose d'abord est le calcul des  $\text{quot}(P_i^n, g_0)$ ; pour  $i = 1$ , c'est fait. Pour  $i = 2, 4, 8$ , voir le n° 6. Ensuite, introduisons les assertions:

$$(5.3) \quad \ll I(n; i) \gg: \forall g: \text{quot}(P_i^n, g) \geq \text{quot}(P_i^n, g_0);$$

$$(5.4) \quad \ll IC(n; i) \gg: \ll I(n; i) \gg \text{ et } \ll \text{quot}(P_i^n, g) = \text{quot}(P_i^n, g_0) \text{ entraîne } (P_i^n, g) \text{ et } (P_i^n, g_0) \text{ sont isométriques} \gg;$$

$$(5.5) \quad \ll P(n; i) \gg: \exists k > 0 \text{ telle que } \forall g: \text{quot}(P_i^n, g) \geq k.$$

Voir le tableau, page 85.

### 6. Le cas kählérien.

Soit  $(M, g)$  une variété hermitienne, c'est-à-dire que  $M$  possède une structure analytique complexe, dont on notera  $J$  la multiplication par  $(-1)^{1/2}$  sur le fibré réel  $TM$ , et que  $g$  commute avec  $J: \forall x, y: g(J(x), J(y)) = g(x, y)$ . On en déduit sur  $M$  une forme alternée de degré deux  $\omega$ , par

$$(6.1) \quad \forall x, y: \omega(x, y) = g(x, J(y)).$$

L'inégalité de Wirtinger ([7], p. 40) entraîne que si  $Y$  est une sous-variété compacte de dimension deux de  $M$ , alors

$$(6.2): \text{vol}(Y, g) \geq \int_Y \omega_Y, \text{ l'égalité ayant lieu si et seulement si } Y \text{ est une sous-variété analytique complexe.}$$

Supposons de plus  $(M, g)$  kählérienne, c'est-à-dire  $d\omega = 0$  (on appelle  $\omega$  la forme de Kähler de  $(M, g)$ ). Si  $Y$  et  $Z$  sont homotopes:

$$(6.3) \quad \int_Y \omega|_Y = \int_Z \omega|_Z$$

d'après la formule de Stokes.

Maintenant,  $(P_2^n, g_0)$  est kählérienne, pour la structure complexe canonique du projectif complexe  $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$ . D'après (6.2) et (6.3), quel que soit  $Y \sim P_2^1$  et parce que  $P_2^1 \subset P_2^n$  est une sous-variété analytique complexe, on a pour la forme de Kähler  $\omega_0$  de  $(P_2^n, g_0)$ :

$$\text{vol}(Y, g_0) \geq \int_Y \omega_0|_Y = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \text{vol}(P_2^1, g_0).$$

Ce qui démontre (voir (2.10)) que  $\text{carc}(P_2^n, g_0) = \pi$ , puis  $\text{quot}(P_2^n, g_0) = \frac{1}{n!}$ .

Soit maintenant  $g$  une s.r. kählérienne sur  $P_2^n$  telle que la forme de Kähler associée  $\omega$  vérifie  $\omega = \omega_0 + d\alpha$ , où  $d\alpha$  est la différentielle extérieure d'une différentielle  $\alpha$  de degré un. De telles s.r. existent: prendre une fonction  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  et poser  $\omega = \omega_0 + (-1)^{1/2} \delta \bar{\delta} f$ ; définir  $g$  par (6.1) à partir de  $\omega$ . Pour  $f$  assez petite,  $g$  est encore définie positive. Pour toute variété hermitienne on a  $v_g = \frac{1}{n!} \wedge^n \omega$ , où  $n$  est la dimension complexe. On aura donc:

$$\text{vol}(P_2^n, g) = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \wedge^n \omega = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \wedge^n \omega_0 = \text{vol}(P_2^n, g_0)$$

d'après la formule de Stokes. Puis, pour  $Y \sim P_2^1$ :

$$\text{vol}(Y, g) \geq \int_Y \omega|_Y = \int_{P_2^1} \omega|_{P_2^1} = \int_{P_2^1} \omega_0|_{P_2^1} = \text{carc}(P_2^n, g_0)$$

donc  $\text{carc}(P_2^n, g) = \text{carc}(P_2^n, g_0)$ . D'où  $\text{quot}(P_2^n, g) = \text{quot}(P_2^n, g_0)$  pour toute  $g$  du type précédent; or en général  $(P_2^n, g)$  et  $(P_2^n, g_0)$  ne seront pas isométriques; ainsi «  $IC(n;2)$  » est fausse.

La même méthode reste valable pour calculer  $\text{quot}(P_4^n, g_0)$  (resp.  $\text{quot}(P_8^n, g_0)$ ). On considère cette fois-ci la forme canonique alternée de degré 4 (resp. 8) de  $P_4^n$  (resp.  $P_8^n$ ); on aura  $\text{carc}(P_4^n, g_0) = \text{vol}(P_4^1, g_0) = \pi^2/6$ , d'où  $\text{quot}(P_4^n, g_0)$  (voir tableau). De même:  $\text{carc}(P_8^n, g_0) = \text{vol}(P_8^1, g_0) = \text{vol}(S^8, g_0/4) = \pi^4/8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$ . (d'après (2.10)); d'où  $\text{quot}(P_8^n, g_0)$  (tableau). Par contre, on ne sait pas ce qu'il en est de «  $IC(n;4)$  » ou «  $IC(2;8)$  ».

### 7. Théorèmes de Loewner, Blatter.

La formule (4.1) peut encore servir à définir le carcan  $\text{carc}(M, g)$  de n'importe quelle variété riemannienne compacte, puis

$$(7.1) \quad \text{quot}(M, g) = \frac{\text{vol}(M, g)}{(\text{carc}(M, g))^n}, \quad n = \dim M.$$

Pour le tore de dimension deux  $S^1 = S^1 \times S^1$ , le résultat suivant a été obtenu avant celui de Pu:

(7.2): *théorème* (Loewner, [14]). *Pour toute  $g$ :  $\text{quot}(S^1 \times S^1, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; en outre  $\text{quot}(S^1 \times S^1, g) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  si et seulement si  $(S^1 \times S^1, g)$  est isométrique à un tore équilatéral (voir (2.4.2)).*

TABLEAU

(on a posé  $p) = (2p-1) \cdot (2p-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$ )

|                         | $S^n = P_0^n$  | $P_1^2$             | $P_1^n = P^n(\mathbf{R}) (n \geq 3)$                               | $P_2^n$            | $P_4^n$                    | $P_8^2$   |
|-------------------------|--|---------------------|--|--------------------|----------------------------|---|
| $\text{vol}(P;; g_0)$   | $n = 2p: 2 \cdot \frac{(2\pi)^p}{p}$<br>$n = 2p + 1: 2 \cdot \frac{\pi^{p+1}}{p!}$ | $2\pi$              | $n = 2p: \frac{(2\pi)^p}{p}$<br>$n = 2p + 1: \frac{\pi^{p+1}}{p!}$ | $\frac{\pi^n}{n!}$ | $\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$ | $\frac{\pi^8}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$ |
| $\text{quot}(P; ; g_0)$ |  | $2 \frac{\pi}{\pi}$ | $n = 2p: \frac{2^p}{p}$<br>$n = 2p + 1: \frac{\pi}{p!}$            | $1 \frac{1}{n!}$   | $\frac{6^n}{(2n+1)!}$      | $\frac{7}{11}$  |
| « $I(.; .)$ »           |  | vraie               | ouverte  | ouverte            | ouverte                    | ouverte   |
| « $IC(.; .)$ »          |  | vraie               | ouverte  | fausse             | ouverte                    | ouverte   |
| « $P(.; .)$ »           |  | vraie               | ouverte  | ouverte            | ouverte                    | ouverte   |

La démonstration démarre comme celle de (4.2), sauf qu'il n'y a même pas à prendre de revêtement. On aboutit à  $\text{quot}(S^1 \times S^1, g) \cong \text{quot}(\mathbf{R}^2/G, g_0/G)$ , quotient d'un tore plat associé au réseau  $G$  de  $\mathbf{R}^2$ . Il reste ensuite le problème de géométrie élémentaire: étudier les quotients des tores plats.

Soit  $G_q$  la surface compacte orientable à  $q$  trous (ou surface orientable de genre  $q$ , toutes ces surfaces sont difféomorphes à  $G_q$ ).

(7.3): *théorème* (Blatter, [3]). Pour tout  $q$  quelle que soit la s.r. sur  $G_q$ :  $\text{quot}(G_q, g) \cong (t_{2q})^{1/q}$  (où les  $t_n$  sont ceux définis par (7.4)).

La démonstration diffère radicalement de celles de (4.2) et (7.2); elle repose sur l'emploi des formes harmoniques; et l'on intègre sur leurs courbes de niveau.

Pour  $q \geq 2$ , la situation diffère de celle de (7.2); les  $b_q$  sont bien les meilleures possibles:  $b_q = \inf_{g \text{ s.r. sur } G_q} \text{quot}(G_q, g)$ , mais cette borne n'est jamais atteinte si  $q \geq 2$  ([1], p. 309).

Une bonne généralisation naturelle est de se demander si

$$(7.4) \quad \forall g: \text{quot}((S^1)^n, g) \cong \inf_{G \text{ réseau de } \mathbf{R}^n} \text{quot}(\mathbf{R}^n/G, g_0/G) = t_n.$$

Non seulement cette question est ouverte, mais en outre les nombres arithmétiques  $t_n$  ne sont pas connus, sauf pour  $2 \leq n \leq 8$  (voir [5], p. 332). On sait aussi que  $t_n > 0$  et est réalisée effectivement:

[5], corollary, p. 143. Enfin que  $t_n$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini: [5], p. 247.

Enfin, on voit bien quel est le problème type dont ceux qui précèdent ne sont que des cas particuliers; soit  $M$  une variété  $C^\infty$  compacte et  $\alpha, \beta, \dots$  différentes classes d'homologie, d'homotopie (libre) de  $M$ . Pour toute telle classe on définit, pour toute s.r.  $g$  sur  $M$ :

$$(7.5) \quad \alpha(g) = \inf_{Y \in \alpha} \text{vol}(Y, g)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les sous-variétés  $Y$  de  $M$  qui appartiennent à la classe  $\alpha$  considérée. Remarquons en passant que l'on ne se préoccupe pas de la réalisation de  $\alpha(g)$  par une sous-variété  $Y$ ; mais ce n'est pas par manque d'intérêt! Le problème général est: existe-t-il, sur certaines variétés, des relations entre  $\alpha(g), \beta(g), \dots$ , indépendantes de la s.r.  $g$  sur  $M$ ? Le théorème de Pu est relatif au cas où  $\alpha$  est la classe fondamentale (de dimension deux) de  $P_1^2 = M$  et  $\beta$  la classe des droites projectives; on a  $\alpha(g) \cong \frac{2}{\pi} (\beta(g))^2$  pour toute  $g$ . Le théorème de Loewner montre, en

tout cas, que si  $M, N$  sont deux variétés compactes, et si  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) est la classe d'homotopie de  $M \times N$  qui représente  $M$  (resp.  $N$ ), alors on n'a pas en général:  $\text{vol}(M \times N, g) \cong \alpha(g) \cdot \beta(g)$  pour toute  $g$ . Voir aussi [11'].

## GÉODÉSIIQUES.

### 8. Définition.

Après les volumes, les invariants riemanniens qui se présentent naturellement sont les géodésiques. Sur la v.r.  $(M, g)$  posons, pour deux points  $m, n \in M$ :

$$(8.1) \quad d(m, n) = \inf_c \text{long}(c, g)$$

(où la longueur est celle définie en (3.5) et la borne est inférieure est prise sur l'ensemble des courbes d'extrémités  $m, n$ ).

On montre ([13], p. 62; [12], p. 166 toutes les références [12] réfèrent au vol. I de cet ouvrage, [1], p. 225) que  $d$  est une distance sur  $M$ ; ainsi  $(M, g)$  est canoniquement un espace métrique. En outre la topologie de variété de  $M$  coïncide avec la topologie de cette métrique ([13], p. 62; [12], p. 166; [1], p. 226). Les géodésiques de  $(M, g)$  sont les courbes de classe  $C^1$  qui localement réalisent cette distance et sont à vitesse constante i.e.  $c : I \rightarrow M$  ( $I$  intervalle de  $\mathbf{R}$ ) est une géodésique si  $|c'|$  est constante et si  $\forall t \in I \exists t' > t, t' \in I$ , tel que  $\text{long}(c|_{[t, t']}, g) = d(c(t), c(t'))$ .

Pour  $(\mathbf{R}^n, g_0)$  les géodésiques sont les droites (parcourues uniformément); pour une surface  $S \subset \mathbf{R}^3$ , ce sont les courbes dont l'accélération est normale à  $S$ .

On ne peut guère travailler qu'avec des v.r. *complètes*, c'est-à-dire complètes pour la distance (8.1). On démontre ([13], p. 62; [12], p. 172; [1], p. 235) que si  $(M, g)$  est complète:

$$(8.2) \quad \forall m, n \in M \exists c, \text{ courbe d'extrémités } m, n, \text{ telle que } \text{long}(c, g) = d(m, n);$$

$$(8.3) \quad \forall x \in TM \text{ il existe une géodésique unique } c : \mathbf{R} \rightarrow M \text{ telle que } c'(0) = x.$$

*Remarques :*

(8.4): la courbe dont l'existence est affirmée en (8.2) est toujours une géodésique; une telle courbe n'est pas unique en général: voir (9.2) et prendre sur  $(S^n, g_0)$  deux points  $m, n$  antipodes. Par contre on démontre

([13], p. 59; [12], p. 165; [1], p. 224) que si  $m, n$  sont assez voisins, cette plus courte géodésique (i.e. de longueur  $d(m, n)$ ) est *unique*.

(8.5): les géodésiques sont invariantes par isométries: si  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  est une isométrie et  $c$  une géodésique de  $(N, h)$ , alors  $f \circ c$  est une géodésique de  $(M, g)$ .

### 9. Exemples de géodésiques.

(9.1): les géodésiques de  $(S^n, g_0)$  sont les grands cercles (parcourus uniformément).

En effet, soit  $c$  une géodésique de  $(S^n, g_0)$  et  $m, n$  deux points de  $c$  assez voisins pour vérifier (8.4). Soit  $P$  le sous-espace vectoriel de dimensions deux de  $\mathbf{R}^{n+1}$  déterminé par  $m$  et  $n$ ,  $C$  le grand cercle  $P \cap S^n$  et  $s$  la symétrie euclidienne par rapport à  $P$  et restreinte à  $S^n$ . Les seuls points fixes de  $s$  sont les points de  $C$ . Comme  $s$  est une isométrie de  $(S^n, g_0)$  elle transforme la restriction  $\bar{c}$  de  $c$  de  $m$  à  $n$  en une géodésique  $s \circ \bar{c}$  (d'après (8.5)); d'après (8.4), on a donc  $s \circ \bar{c} = \bar{c}$ , donc  $\bar{c} \subset C$ . En particulier:

(9.2): les géodésiques de  $(S^n, g_0)$  sont toutes des courbes simples (sans point double), périodiques et de longueur  $2\pi$ .

On va voir en fait que les géodésiques des  $(P_i^n, g_0)$  ont les mêmes propriétés.

(9.3): géodésiques des submersions riemanniennes.

Soit  $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$  une submersion riemannienne (voir (2,5)); alors:

(9.4): si  $c$  est une géodésique de  $(M, g)$  telle que  $c'(0) \in H_{c(0)}$ , alors  $c$  est horizontale (voir (3.6));

(9.5): si  $c$  est une telle géodésique horizontale de  $(M, g)$ , alors  $p \circ c$  est une géodésique de  $(N, h)$ .

(Pratiquement on obtient donc toutes les géodésiques de  $(N, h)$  par projection des géodésiques horizontales de  $(M, g)$ ).

Ces deux affirmations se démontrent ensemble. Soit  $c$  une géodésique de  $(N, h)$  et  $m, n$  deux points de  $c$  assez voisins pour vérifier (8.4). Soit  $\tilde{c}$  un relèvement horizontal de  $c$  et  $\tilde{m}, \tilde{n}$  les relèvements de  $m, n$ . Soit  $d$  la plus courte géodésique de  $\tilde{m}$  à  $\tilde{n}$  (voir (8.4)); alors (d'après (3.6)):

$$\text{long}(p \circ d) \leq \text{long}(d) \leq \text{long}(\tilde{c}) = \text{long}(c) = d(m, n).$$

Comme  $p \circ d$  est d'extrémités  $m, n$  c'est donc (d'après (8.4)) que l'on doit avoir l'égalité partout d'où (d'après (3.6)) nos assertions.

(9.6): géodésiques des  $P_i^n$  ( $i=1, 2, 4$ ).

Considérant les submersions riemanniennes (2.9), on voit que (9,5) montre que les géodésiques des  $(P_i^n, g_0)$  sont les projections des géodésiques horizontales (pour la submersion considérée) de  $S^{in+i-1}$ . Il suffit donc de savoir comment se projettent les grands cercles horizontaux de  $S^{in+i-1}$  sur  $P_i^n$ . On voit d'abord que les grands cercles de  $S^{in+i-1}$  revêtent tous deux fois les géodésiques de  $(P_i^n, g_0)$ , parce que  $p(-m) = p(m)$  pour tout  $m \in S^{in+i-1}$ . Donc:

(9.7): les géodésiques des  $(P_i^n, g_0)$  sont toutes des courbes simples, périodiques et de longueur  $\pi$ .

Pour se faire une idée de la géométrie des  $P_i^n$  ( $i=0, 1, 2, 4$ ), il faut encore savoir comment se rencontrent deux géodésiques  $c, d$  issues d'un  $m = c(0) = d(0)$ . Pour  $(S^n, g_0)$ , elles se rencontrent exactement à la distance  $\pi$  en l'antipode de  $m$ , puis de nouveau en  $m$  au temps  $2\pi$  (et c'est tout!). On en déduit que pour  $(P_1^n, g_0)$ , revêtu deux fois par  $(S^n, g_0)$ , les géodésiques issues d'un  $m \in P_1^n$  ne se rencontrent pas ailleurs qu'en  $m$  (ce sont les droites projectives passant par  $m$ ). Le milieu (situé à une distance  $\frac{\pi}{2}$  de  $m$ ) de ces géodésiques de  $P_1^n$  passant par  $m$  décrit l'hyperplan projectif dual de  $m$ , dans la dualité associée à la structure euclidienne de  $K^{n+1}$ .

Pour les  $P_i^n$  ( $i=2, 4$ ), on note d'abord que  $T_m P_i^n$  est un  $K$ -espace vectoriel. La relation d'équivalence sur  $K^{n+1} - \{0\}$ , qui donne naissance à  $P_i^n$  montre que ([1], p. 130)  $c$  et  $d$  ne se rencontrent pas ailleurs qu'en  $m$  si  $d'(0) \notin K \cdot c'(0)$ . Si par contre  $d'(0) \in K \cdot c'(0)$ , alors  $c$  et  $d$  se rencontrent en plus seulement en leur point à distance  $\frac{\pi}{2}$  de  $m$ . En outre, lorsque  $d'(0)$  parcourt  $K \cdot c'(0)$ , les géodésiques correspondantes forment une sphère de dimension  $i$  de  $P_i^n$ , sphère qui n'est autre qu'une droite projective. Et lorsque ces différentes  $i$ -sphères-droites projectives passant par  $m$  remplissent  $P_i^n$ , les antipodes de  $m$  sur ces sphères décrivent l'hyperplan projectif dual de  $m$  (pour la structure hermitienne de  $K^{n+1}$ ), hyperplan qui est une sous-variété de dimension réelle  $i(n-1)$  de  $P_i^n$ . On notera aussi que ces droites projectives (resp. hyperplans projectifs) sont isométriques (comme sous-variété de  $(P_i^n, g_0)$ ) aux  $(S^i, \frac{1}{2}g_0)$  (resp.  $(P_i^{n-1}, g_0)$ ) (ce sont même des sous-variétés totalement géodésiques).

(9.8): le cas de  $(P_8^2, g_0)$ .

Pour étudier les géodésiques de  $(P_8^2, g_0)$ , il faut (voir (2.7)) utiliser la technique des espaces symétriques; on trouvera dans [11], p. 356 et surtout



dans [4], p. 466, le fait que le comportement des géodésiques de  $(P_8^2, g_0)$  est exactement le même que celui décrit précédemment pour les géodésiques des  $(F_i^n, g_0)$  ( $i=1, 2, 4$ ), en prenant  $K = \mathbf{Ca}$  et  $i = 8$ .

10. Géodésiques périodiques.

(10.1): *définition*: une géodésique  $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$  est dite périodique (ou fermée) si  $c$  est non constante et si  $c'(a) = c'(b)$ . Elle est dite en outre simple si  $c|_{[a,b[}$  est injective.

Le mot périodique est justifié parce que (8.3) montre que  $c$  se prolonge en une géodésique  $\bar{c} : \mathbf{R} \rightarrow M$  telle que  $\bar{c}|_{[a,b]} = c$  et  $c(t+b-a) = c(t)$  pour tout  $t$ . La figure 1 ne représente pas une géodésique périodique (mais seulement un lacet géodésique), la figure 2 représente une géodésique

périodique non simple, la figure 3 représente une géodésique périodique simple:

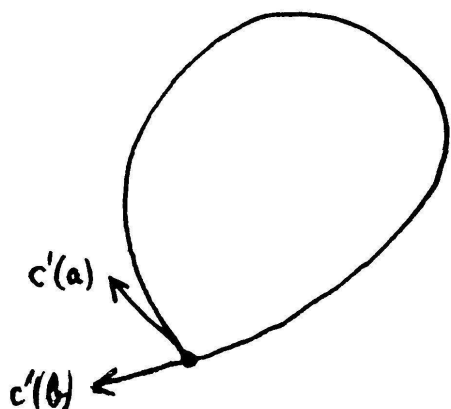


Fig. 1

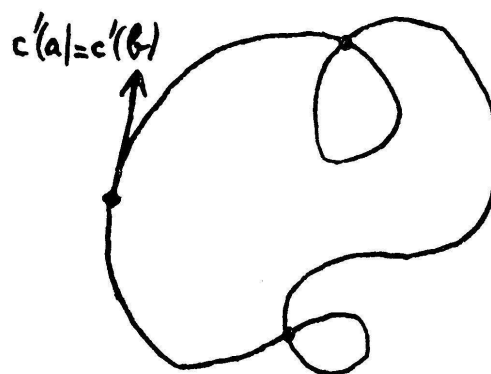


Fig. 2

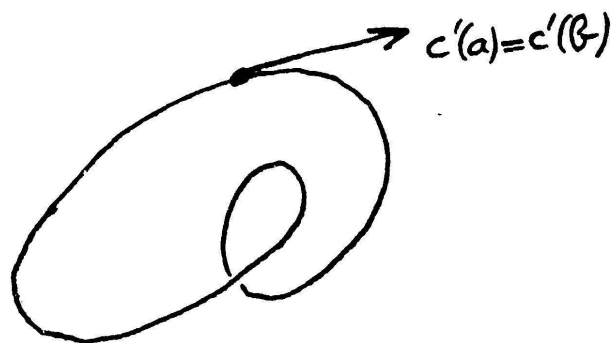


Fig. 3

Pour une v.r.  $(M, g)$  on introduit les trois assertions:

(10.2): « GPS ( $m$ ) »:  $\forall x \in T_m M, x \neq 0$ , la géodésique  $c$  telle que  $c'(0) = x$  est périodique, simple et de longueur  $\pi$ ;

(10.3): « GPS »:  $\exists m \in M$  tel que « GPS ( $m$ ) »;

(10.4): « TGPS »:  $\forall m \in M$  on a « GPS ( $m$ ) ».

Exemple: les  $(S^n, \frac{1}{2}g_0)$  et les  $(P_i^n, g_0)$  ( $i=1, 2, 4, 8$ ) vérifient « TGPS ».

Ce qui précède conduit naturellement à deux types de problèmes: (i): dans quelle mesure « GPS » ou « TGPS » caractérisent-elles les  $(P_i^n, g_0)$ ? (ii): existence d'une ou plusieurs géodésiques périodiques, voire une infinité, sur une v.r.

### 11. Variétés telles que « GPS ».

On peut seulement espérer au plus que « GPS » caractérisent les variétés différentiables  $P_i^n$ . En effet, soit  $m$  le pôle nord de  $S^n$  et  $G$  son groupe d'isotropie, c'est-à-dire  $G = \{s \in SO(n+1): s(m) = m\}$  ( $G$  est canoniquement isomorphe à  $SO(n)$ ). Alors, pour n'importe quelle s.r. sur  $S^n$  qui est invariante par  $G$  (i.e. toutes les actions de  $G$  sont des isométries), on a « GPS ( $m$ ) » (laissé au lecteur en exercice: les géodésiques issues de  $m$  sont les méridiens). Et, bien sûr, de telles s.r. n'ont aucune raison d'être isométriques à  $g_0$ .

Actuellement, d'une part on ne connaît pas d'autres variétés que les  $P_i^n$  à posséder une s.r. telle que « GPS ». D'autre part, on a le résultat suivant, dans lequel  $H^*(.; \mathbf{Z})$  représente l'anneau de cohomologie entière: (11.1): *théorème* (Bott: [2], Samelson: [15]): *soit*  $(M, g)$  *telle que* « GPS ». *Alors*  $\exists n$  *et*  $\exists i$  *tels que*  $H^*(M; \mathbf{Z})$  *soit isomorphe en tant qu'anneau à*  $H^*(P_i^n; \mathbf{Z})$ .

Il faut remarquer qu'il existe ([6]) des variétés  $M$ , non homéomorphes à  $P_4^2$ , mais cependant telles que  $H^*(M; \mathbf{Z})$  et  $H^*(P_4^2; \mathbf{Z})$  soient isomorphes en tant qu'anneaux. C'est pourquoi il faudrait décider si, oui ou non, il existe sur une de ces  $M$ , une s.r. telle que « GPS ».

La démonstration complète de (11.1) est colossale. Le point de départ est la théorie de Morse usuelle. La condition « GPS » assure ceci: il existe une filtration convenable de  $\Omega \cdot (M)$ , l'espace des lacets à point base de  $M$ , par des sous-espaces  $\Omega_i(M)$ , filtration telle que les nombres de Betti relatifs  $b_k(\Omega_{i+1}(M), \Omega_i(M))$  soient tous nuls sauf un précis, qui est en plus égal à un. La suite spectrale de cette filtration permet alors de déterminer exactement  $H^*(\Omega \cdot (M); \mathbf{Z})$  (à l'aide d'un seul entier encore inconnu  $i$ ). De  $H^*(\Omega \cdot (M); \mathbf{Z})$  on passe, par la suite spectrale de la fibration de Serre, à  $H^*(M; \mathbf{Z})$ , dont on montre que c'est un anneau de polynômes tronquée, le générateur est de degré  $i$ . Un résultat très profond de topologie algébrique assure que ceci ne peut se produire que pour  $i = 0, 1, 2, 4$  et  $n$  quelconque ou si  $i = 8$  pour  $n = 1, 2$  (où  $\dim M = ni$ ). C.Q.F.D.

## 12. Variétés telles que « TGPS ».

Un exemple surprenant est la surface de Zoll :

(12.1): *théorème (Zoll, [16]): sur  $S^2$  il existe des s.r.  $g$  telles que « TGPS » et que  $(S^2, g)$  ne soit pas isométrique à  $(S^2, g_0)$ .*

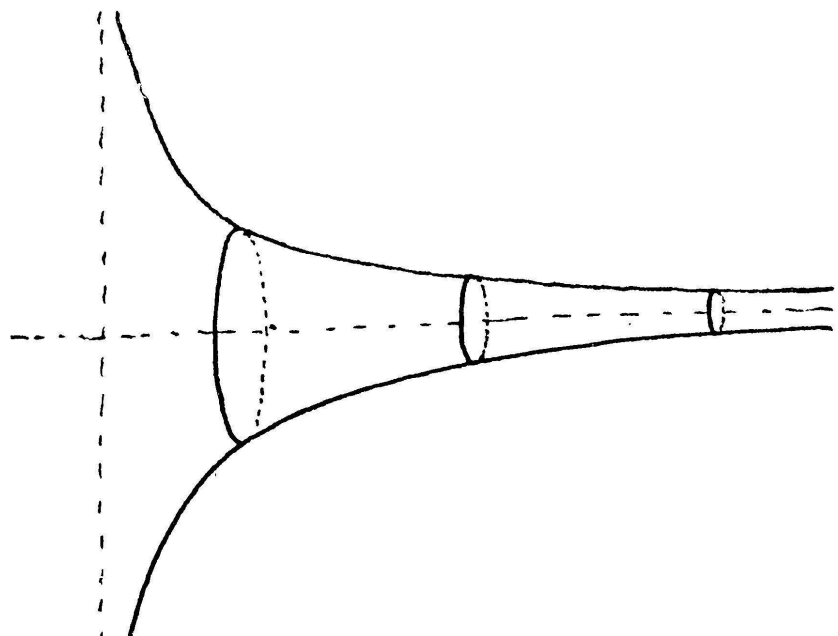
Ainsi « TGPS » n'est pas caractéristique des  $(P_i^n, g_0)$  en toute généralité. D'ailleurs (communication de A. Weinstein) on peut construire des s.r. analogues sur les  $S^n \forall n \geq 2$ . Cependant « TGPS » caractérise  $(P_1^2, g_0)$ :

(12.2): *théorème (Green, [9]): si  $(P_1^2, g_0)$  est telle que « TGPS », alors  $(P_1^2, g)$  est isométrique à  $(P_1^2, g_0)$ .*

Toutes les généralisations possibles de (12.2), pour différents  $n$  et  $i$ , sont des problèmes entièrement ouverts. La démonstration de (12.2) est absolument particulière à la dimension deux; elle utilise, pour voir  $(P_1^2, g)$ , deux inégalités en sens contraire; la première est basée sur la formule de Gauss-Bonnet en dimension deux et une inégalité dont l'extension en dimension plus grande ne correspond plus à la formule de Gauss-Bonnet. La deuxième inégalité utilise une formule de géométrie intégrale de Santalo dont l'extension en dimension plus grande ne fonctionne que si le projectif  $(P_1^n, g)$  (pour lequel on voudrait démontrer une généralisation du théorème (12.2)) possédait une hypersurface homotope à  $P_1^{n-1}$  et totalement géodésique, ce qui n'est pas le cas en général.

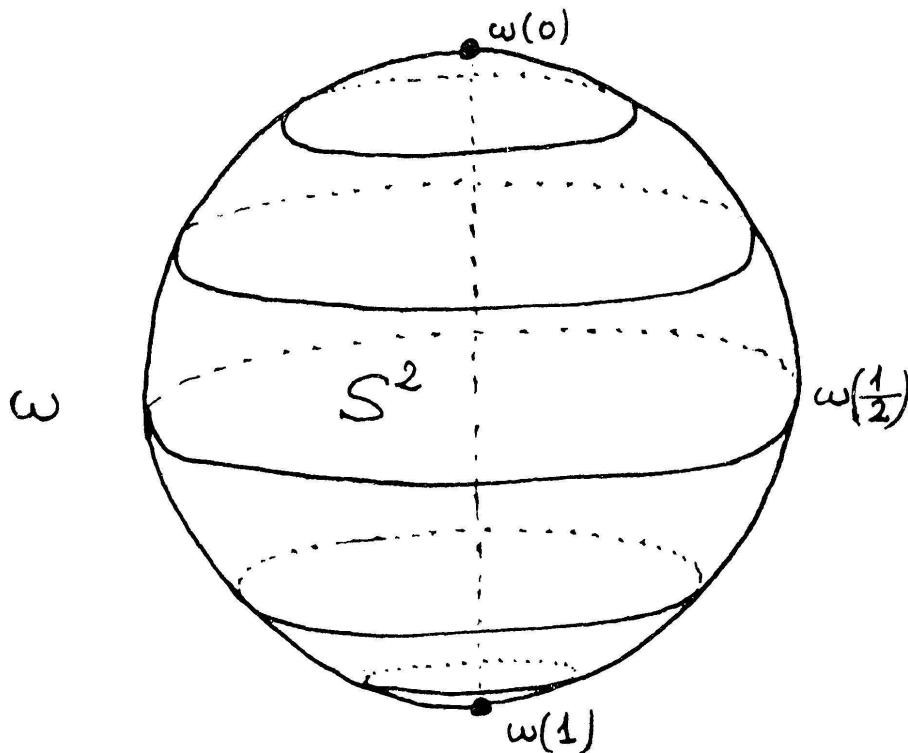
## 13. Existence d'une géodésique périodique.

Une variété complète, non compacte, même non simplement connexe, n'admet pas nécessairement de géodésique périodique (g.p.); exemple la surface de révolution ci-après :



Un théorème folklorique est le:

(13.1): soit  $(M, g)$  compacte. Alors, quelle que soit la classe d'homotopie libre  $\alpha$  (voir (7.4)) de  $M$ ,  $\alpha \neq 0$ , il existe une g.p.  $c \in \alpha$ . En particulier si  $M$  est non simplement connexe compacte, elle admet toujours une g.p.



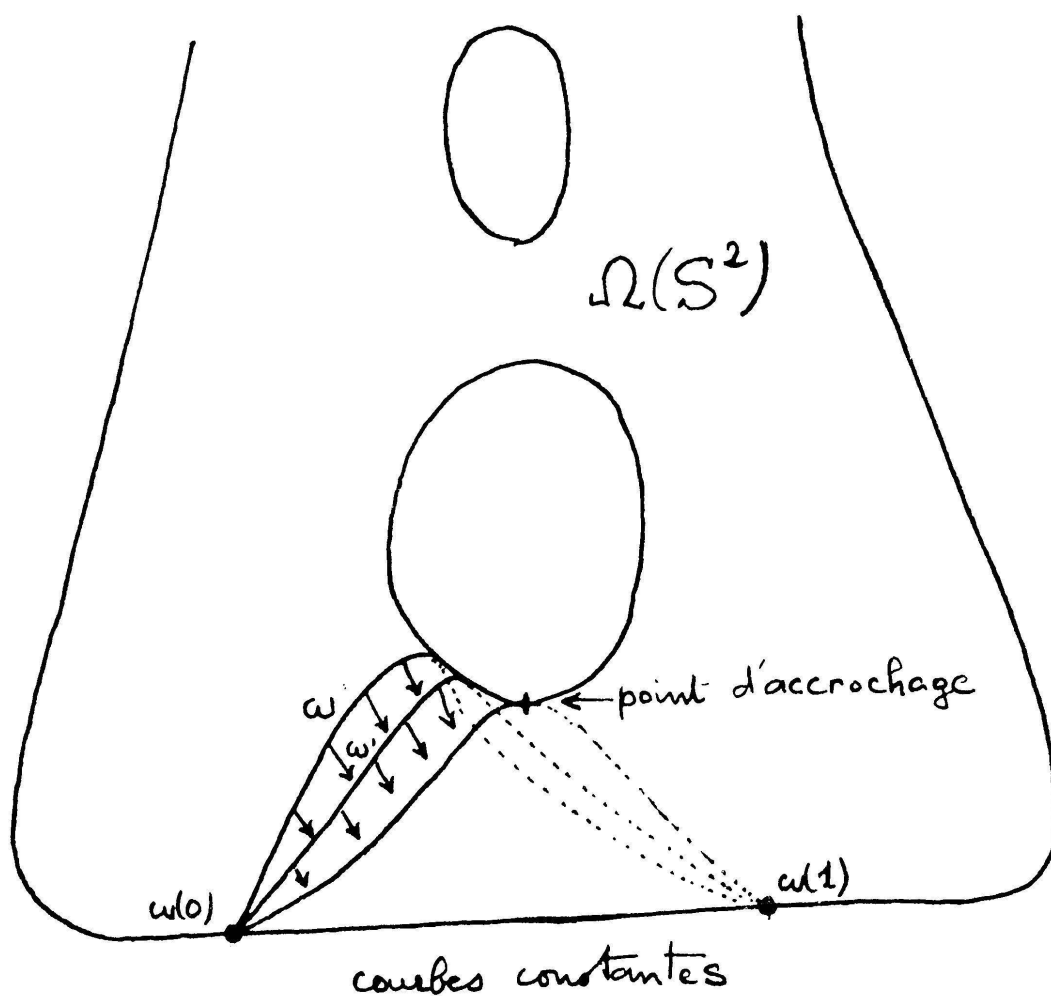
La démonstration est simple; on montre que la borne inférieure  $\alpha(g) = \inf_{c \in \alpha} \text{long}(c, g)$  est réalisée, parce que  $M$  est compacte; et une courbe réalisant cette borne inférieure est nécessairement une g.p.

Par contre, si  $M$ , toujours compacte, est simplement connexe, la question de l'existence d'au moins une g.p. est beaucoup plus difficile. Poincaré fut le premier à démontrer une telle existence en 1905, pour  $(S^2, g)$  avec  $g$  analytique (Birkhoff étendit ce résultat à  $S^n$ ,  $g$  toujours analytique, en 1927). Mais il fallut attendre jusqu'en 1952 pour le:

(13.2): *théorème (Fet-Lyusternik): toute v.r. compacte admet une g.p.*

La démonstration est un usage typique de la théorie de Morse. Cette démonstration consiste à mettre en forme l'idée suivante, que nous présentons sur  $S^2$ . Soit  $\Omega(S^2) = C^0(S^1; S^2)$  l'espace des courbes fermées

(lacets sans point base) de  $S^2$ . Dans  $\Omega(S^2)$  on considère le chemin  $\omega$ , dont l'origine est la courbe constante pôle nord et l'extrémité la courbe constante pôle sud, constitué par les parallèles de  $S^2$ . Sur  $\Omega(S^2)$  on a la fonction longueur; si  $\omega$  ne contient aucune géodésique, on peut le déformer continûment en des chemins  $\omega'$ , de même extrémités, déformation dans laquelle chaque courbe diminue strictement en longueur. Continuant ainsi, on a trouvé une g.p., ou on a déformé  $\omega$  en un chemin dont toutes les courbes sont constantes (de longueur nulle). Or cette dernière possibilité est exclue parceque  $\omega$  est précisément un générateur de  $\pi_2(S^2) \neq 0$ . C'est donc que notre chemin  $\omega$  reste « accroché » et le point d'accrochage est précisément une g.p.



#### 14. Existence de plusieurs géodésiques périodiques.

De nombreux auteurs (Lusternik, Schnirelmann, Morse, Fet, Alber, Klingenberg) ont obtenu des résultats partiels d'existence, sur une v.r. compacte donnée, de plusieurs (2, 3, ...) g.p. géométriquement distinctes

(des g.p.  $c_1, \dots, c_k$  sont dites *géométriquement distinctes* si les sous-ensembles  $c_1(\mathbf{R}), \dots, c_k(\mathbf{R})$  de  $M$  sont distincts). Nous ne donnons pas le détail de leurs résultats; en effet il est actuellement raisonnable de conjecturer que toute v.r. compacte admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.

D'abord, bien sûr, on ne connaît pas de v.r. compacte, de dimension  $\geq 2$ , dont on ait pu montrer qu'elle n'a qu'un nombre fini de g.p. géométriquement distinctes. Ensuite d'une part on dispose maintenant du: **(14.1): théorème** (Gromoll-Meyer, [10]): *soit  $\{b_k(\Omega(M))\}$  la suite des nombres de Betti de l'espace  $\Omega(M) = C^0(S^1; M)$ . Soit  $M$  une variété compacte simplement connexe telle que la suite  $\{b_k(\Omega(M))\}$  n'est pas bornée (i.e.  $\forall a \in \mathbf{N} \exists k$  tel que  $b_k(\Omega(M)) > a$ ). Alors, quelle que soit la s.r. sur  $M$ , la v.r.  $(M, g)$  admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.*

(Noter que les nombres de Betti  $b_k(\Omega(M))$  pour une variété  $M$  compacte simplement connexe sont tous finis.)

D'autre part, bien que l'on ne sache pas exactement quelles sont les variétés compactes  $M$  pour lesquelles la suite  $\{b_k(\Omega(M))\}$  n'est pas bornée, on a ceci: (i) plusieurs classes assez larges de  $M$  compactes ayant une telle suite non bornée; (ii) les seules variétés simplement connexes connues pour lesquelles cette suite est bornée sont les  $P_i^n$ . Or les  $P_i^n$  ont, à vrai dire pour leur s.r. canonique  $g_0$ , une bonne infinité de g.p. géométriquement distinctes! Remarquer que l'on ne sait pas, même pour des s.r.  $g$  voisines de  $g_0$ , si  $(P_i^n, g)$  admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.

Quant à la démonstration de (14.1), elle est fine et technique. En voici un schéma heuristique, seulement dans le cas « non dégénéré » (le cas dégénéré est cependant essentiel et complique grandement la démonstration). Il faut connaître la théorie de Morse pour les sous-variétés critiques non-dégénérées et pour les variétés de dimension infinie. On procède par l'absurde: s'il n'y a qu'un nombre fini de g.p. géométriquement distinctes, c'est qu'il existe  $k$  géodésiques périodiques simples  $c_1, \dots, c_S$ , telles que toute g.p. soit un recouvrement fini de l'une d'entre elles. A chaque g.p. on associe un index  $k$ ; les inégalités de Morse disent que le nombre de g.p. d'index égal à  $k$  est supérieur ou égal à  $b_k(\Omega(M))$ . Etudiant les index  $k(m)$  d'une g.p. recouvrant  $m$  fois une g.p. donnée, on trouve que  $k(m)$  croît, en gros, comme une progression arithmétique. Ceci montre donc que les  $b_k(\Omega(M))$  sont bornés. C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGER, M. *Geodesics in Riemannian Geometry* (Tata Institute, Bombay).
- [2] BOTT, R. On manifolds all of whose geodesics are closed *Ann. of math.*, 60 (1954), p. 375-382).
- [3] BLATTER, C. Über Extremallängen auf geschlossenen Flächen *Comm. math. Helv.*, 35 (1961), p. 153-168.
- [4] CARTAN, E. Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple *Ann. Ec. Norm.*, 44 (1927), p. 345-467 ou *Œuvres Complètes*, partie I, vol. 2, p. 867-990).
- [5] CASSELS, J. W. S. *An introduction to the geometry of numbers*. Springer, 1959.
- [6] EELS, J., N. KUIPER. Manifolds which are like projective planes *Public. math. IHES*, 1962, n° 14, p. 5-46.
- [7] FEDERER, H. *Geometric measure theory*. Springer, 1969.
- [8] FREUDENTHAL, H. Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktaven Geometrie *Math. Inst. Univ. Utrecht*.
- [9] GREEN, L. W. Auf Wiedersehenfläche. *Ann. of math.*, 78 (1963), p. 289-299.
- [10] GROMOLL, D., W. MEYER. Periodic geodesics on compact riemannian manifolds. A paraître dans *J. of Diff. Geometry*.
- [11] HELGASON, S. *Differential geometry and symmetric spaces*. Academic Press, 1962.
- [11'] KEEN, L. An extremal length on a torus. *J. Analyse. math.*, 19 (1967), p. 203-206).
- [12] KOBAYASHI, S., K. NOMIZU. *Foundations of differential geometry*, vol. I et vol. II Interscience, 1963 et 1969.
- [13] MILNOR, J. W. Lectures on Morse theory. *Ann. of math. Studies*, Princeton, 1963.
- [14] PU, P. M. Some inequalities in certain non-orientable manifolds. *Pacific J.*, 11 (1962), p. 55-71).
- [15] SAMELSON, H. On manifolds with many closed geodesics. *Portugaliae math.*, 32 (1963), p. 193-196.
- [16] ZOLL, O. Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien (mit drei Figuren in Text). *Math. Ann.*, 57 (1903), p. 108-133.

(Reçu le 18 mars 1970)

M. Berger  
Faculté des sciences de Paris  
Département de mathématiques  
9, quai Saint-Bernard  
Paris - 5<sup>e</sup>