

1. Définition des variétés riemanniennes.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE
OU
DEUX VARIATIONS SUR
LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

par M. BERGER

Cet article reproduit, avec quelques développements, une conférence donnée à la réunion du groupe des mathématiciens rhodaniens, le 27 avril 1969 à Lausanne. C'est plutôt un article d'exposition, il n'apporte pas de résultats nouveaux. Après avoir défini ce qu'est une variété riemannienne (n° 1), on en donne des exemples (n° 2); parmi ceux-ci les projectifs réels, complexes, quaternioniens et le plan projectif des octaves de Cayley jouent un rôle à part. Avec les sphères, ils forment exactement la classe des espaces symétriques simplement connexes compacts de rang un. Ils servent de modèles pour les problèmes soulevés dans les deux parties (volumes-surfaces-longueurs, géodésiques) de l'article. On donne ensuite les définitions de deux invariants riemanniens géométriques très simples: les volumes (n° 3), les géodésiques (n° 8). La contemplation des projectifs donne alors lieu à des résultats (voir (4.3) et (12.2)) mais surtout à des problèmes ouverts, problèmes qui nous ont semblé intéressants.

1. *Définition des variétés riemanniennes.*

Rappelons quelques définitions. Une *variété à n dimensions* M est un espace topologique séparé qui peut être recouvert par des ensembles ouverts homéomorphes à des ouverts de \mathbf{R}^n . Un homéomorphisme d'un ouvert U de M sur un ouvert de \mathbf{R}^n est appelé une *carte de domaine* U ; il associe à chaque point de U un système de n nombres réels, qu'on appelle des *coordonnées locales*. Une *structure C^∞* sur M consiste en la donnée d'une classe privilégiée de cartes ou systèmes de coordonnées locales, dont les domaines recouvrent toujours M , jouissant de la propriété suivante: si les domaines U et U' de deux systèmes de cette classe empiètent, les coordonnées d'un point de $U \cap U'$ dans l'un des systèmes sont toujours des fonctions C^∞ (c'est-à-dire indéfiniment différentiables) de ses coordonnées dans l'autre système. Une *variété C^∞* (ou variété différentiable de classe C^∞) est une variété munie d'une structure C^∞ . Toutes les variétés consi-

dérées ici seront C^∞ et les coordonnées locales utilisées seront toujours de la classe privilégiée.

Si M et M' sont deux variétés, une application continue f de M dans M' est dite C^∞ , si les coordonnées locales dans M' de l'image $f(m)$ d'un point m de M sont des fonctions C^∞ des coordonnées locales de m dans M . Si f est bijective et si son inverse f^{-1} est aussi C^∞ , on dit que f est un *difféomorphisme*.

Un *vecteur tangent* à M au point m est défini, relativement à un système de coordonnées locales u_1, \dots, u_n dans un voisinage de m , par un système de valeurs des différentielles du_1, \dots, du_n . Relativement à un autre système de coordonnées locales v_1, \dots, v_n dans un voisinage du même point m , le même vecteur est défini par les valeurs correspondantes des différentielles dv_1, \dots, dv_n , qui sont bien déterminées puisque les v_i sont fonctions C^∞ des u_j . Le fait que dv_i est linéaire en les du_j entraîne que l'ensemble de tous les vecteurs tangents à M en m est muni d'une structure d'espace vectoriel et forme ainsi un espace vectoriel de dimension n ; il est appelé *l'espace tangent* à M en m et noté $T_m M$.

L'ensemble $TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$, réunion de tous les $T_m M$, est canoniquement muni d'une structure topologique et d'une structure C^∞ , telles que, si u_1, \dots, u_n sont des coordonnées locales dans l'ouvert U de M , $TU = \bigcup_{m \in U} T_m M$ est un ouvert de TM homéomorphe à $U \times \mathbf{R}^n$ et $u_1, \dots, u_n, du_1, \dots, du_n$ sont des coordonnées locales dans TU . La variété TM , appelée *l'espace tangent* à M , est en plus munie d'une structure d'espace fibré vectoriel, les fibres de TM étant les $T_m M$.

A toute application C^∞ de la variété M , de dimension n , dans une autre variété M' , de dimension p , $f: M \rightarrow M'$, est canoniquement associée une application de TM dans TM' , appelée *l'application tangente* à f et notée $T(f)$. Elle est définie de la manière suivante: si x est un vecteur tangent à M en m , défini relativement à des coordonnées locales u_1, \dots, u_n par un système de valeurs de du_1, \dots, du_n , son image $T(f)(x)$ est le vecteur tangent à M' en $m' = f(m)$ défini, relativement à des coordonnées locales v_1, \dots, v_p dans un voisinage de m' , par les valeurs correspondantes de dv_1, \dots, dv_p , valeurs bien déterminées puisque les v_i sont fonctions C^∞ des u_j . Cette application $T(f)$ est C^∞ , de plus, sa restriction à $T_m M$, qu'on notera $T_m(f)$, est une application linéaire de $T_m M$ dans $T_m M'$.

Une forme différentielle quadratique sur M est représentée, dans le domaine d'un système de coordonnées locales u_1, \dots, u_n , par une expression telle que

$$\sum_{i,j} g_{ij} du_i du_j \quad (g_{ij} = g_{ji})$$

où les g_{ij} sont des fonctions de u_1, \dots, u_n . Si, pour tous les systèmes de coordonnées locales, ces coefficients sont des fonctions C^∞ , on dit que la forme est C^∞ . Une *structure riemannienne* (s.r.) sur M n'est pas autre chose qu'une forme différentielle quadratique g sur M , *définie positive*, et C_∞ . La forme bilinéaire symétrique associée permet de définir le produit scalaire de deux vecteurs x et y tangents au même point m de M et induit une structure euclidienne dans $T_m M$. On notera ce produit scalaire $g(x, y)$ et l'on écrira

$$|x| = (g(x, x))^{1/2}.$$

Par *variété riemannienne* (v.r.) on entend un couple (M, g) formé d'une variété M et d'une s.r. sur M . Une isométrie entre deux v.r. $(M, g), (M', g')$ est un difféomorphisme $f: M \rightarrow M'$ tel que $f^* g' = g$ (où $(f^* g')(x, y) = g'(T(f)(x), T(f)(y))$). On dira que $(M, g), (M', g')$ sont *isométriques* s'il existe entre elles une isométrie.

Pour le lecteur non spécialiste, nous avons donné, parfois simultanément, trois références: [13], [12], [1]. La référence [13] est donnée parce que son chapitre II fournit une initiation très rapide à la géométrie riemannienne; [12] est donnée car c'est un ouvrage de référence récent et très complet. Enfin [1] pourra être agréable comme contenant la plus grande partie des définitions, exemples et résultats de cet article, ceci en détail.

2. Exemples de variétés riemanniennes.

(2.1): l'espace euclidien (\mathbf{R}^n, g_0) .

Soit E un espace euclidien quelconque, dont $(\cdot | \cdot)$ désigne le produit scalaire; on en déduit sur E une s.r. canonique g_0 : en effet l'espace tangent $T_e E$ à E en e s'identifie canoniquement par une application τ_e à E lui-même. On définira donc g_0 par $g_0(x, y) = (\tau_e(x) | \tau_e(y))$ pour tous $x, y \in T_e E$. Pour \mathbf{R}^n , muni de son produit scalaire canonique, on obtient donc ainsi une v.r. (\mathbf{R}^n, g_0) .

(2.2):

Soit $f: M \rightarrow N$ une application différentiable et h une s.r. sur N . Si l'application tangente à f , $T(f): TM \rightarrow TN$ est telle que, quel que soit m , $T_m(f)$ est *injective*, alors $g = f^* h$ est une s.r. sur M . En effet $f^* h$ est