4. Le théorème de Pu.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

Soit $c : [a, b] \to M$ une courbe d'une v.r. (M, g); même si $c([a, b])$ n'est pas une sous-variété de M on peut définir la longueur de c par:

$$(3.5) \qquad \operatorname{long}(c, g) = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

Exemple : soit $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$ une submersion riemannienne; une courbe c de M sera dite *horizontale* si $c'(t) \in H_{c(t)}$ pour tout t. Des définitions (2.5) et (3.5) on déduit:

(3.6): $\operatorname{long}(p \circ c, h) \leqq \operatorname{long}(c, g)$; en outre $\operatorname{long}(p \circ c, h) = \operatorname{long}(c, g)$ si et seulement si c est horizontale.

4. *Le théorème de Pu.*

Avec cette seule notion de volume se posent déjà des problèmes naturels, loin d'être résolus en général. Commençons par un des rares cas où l'on ait un résultat. Soit g une s.r. sur P_1^2, le plan projectif réel. A (P_1^2, g) on peut attacher deux nombres réels, son volume $\operatorname{vol}(P_1^2, g)$ et son *carcan*, $\operatorname{carc}(P_1^2, g)$, égal à la borne inférieure de la longueur des courbes fermées de P_1^2 non homotopes à zéro:

$$(4.1) \qquad \operatorname{carc}(P_1^2, g) = \inf{}_{c \text{ non} \sim 0} \operatorname{long}(c, g)$$

où il s'agit de l'homotopie des courbes fermées (c'est-à-dire des lacets sans point base). Il est naturel d'espérer que si $\operatorname{carc}(P_1^2, g) \geqq k$, alors $\operatorname{surf}(P_1^2, g)$ est supérieur ou égal à un nombre ne dépendant que de k. Définissons le *quotient* de (P_1^2, g) comme le rapport homogène de degré zéro:

$$(4.2) \qquad \operatorname{quot}(P_1^2, g) = \frac{\operatorname{surf}(P_1^2, g)}{(\operatorname{carc}(P_1^2, g))^2}.$$

La première chose à faire est de calculer $\operatorname{quot}(P_1^2, g_0)$. Le tableau donne le numérateur; pour $\operatorname{carc}(P_1^2, g_0)$, on utilise le théorème (13.1) et (9.1) (il est bien naturel que les plus petites courbes non homotopes à zéro de (P_1^2, g_0) soient les droites projectives!). Donc $\operatorname{quot}(P_1^2, g_0) = 2/\pi$ (voir tableau). L'interrogation précédente est complètement résolue par le:

(4.3): *théorème* (Pu, [14]). *Quel que soit la* s.r. g *sur* P_1^2, *on a* $\operatorname{quot}(P_1^2, g) \geqq \operatorname{quot}(P_1^2, g_0)$. *En outre, si* $\operatorname{quot}(P_1^2, g) = \operatorname{quot}(P_1^2, g_0)$, *alors* (P_1^2, g) et (P_1^2, g_0) *sont isométriques.*

Esquissons la démonstration (voir [14] ou [1], p. 309). On prend le revêtement riemannien (voir (2.4)) $(S^2, \tilde{g})$ de (P_1^2, g). D'après le théorème fondamental de la représentation conforme, appliqué à (S^2, g), il existe un difféomorphisme $f : S^2 \to S^2$ tel que $\tilde{f}^* \tilde{g} = \tilde{\alpha} \,.\, g_0$, où g_0 est la s.r. canonique de S^2 et $\tilde{\alpha}$ une fonction sur S^2. On peut modifier f de façon à pouvoir passer au quotient et trouver un difféomorphisme f de P_1^2 tel que $f^* g = \alpha \,.\, g_0$, $\alpha : P_1^2 \to \mathbf{R}$. Les deux v.r. (P_1^2, g) et $(P_1^2, \alpha \,.\, g_0)$ sont isométriques, donc ont même volumes et carcans. On est donc ramené en fait à deux s.r. g_0 et $\alpha \,.\, g_0$ sur P_1^2; maintenant $SO(3)$ agit sur (P_1^2, g_0) par isométries; on fait la moyenne par cette action et pour la mesure de Haar de $SO(3)$, de la fonction $\alpha^{1/2}$. Ceci donne une fonction $\bar{\alpha}$; la longueur d'une courbe c pour $\bar{\alpha} \,.\, g_0$ est la moyenne de la longueur des courbes $\gamma \circ c$ pour $\alpha \,.\, g_0$, γ parcourant $SO(3)$; donc $\operatorname{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \,.\, g_0) \geqq \operatorname{carc}(P_1^2, \alpha \,.\, g)$. L'inégalité de Schwarz (pour l'intégrale sur $SO(3)$) dit que $\operatorname{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} g_0) \leqq$ $\leqq \operatorname{surf}(P_1^2, \alpha \,.\, g_0)$. Donc $\operatorname{quot}(P_1^2, \bar{\alpha} \,.\, g_0) \leqq \operatorname{quot}(P_1^2, \alpha \,.\, g_0)$. Mais, en fait, $\bar{\alpha}$ est une constante, puisque $SO(3)$ agit transitivement sur P_1^2; donc $\operatorname{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} \,.\, g_0) = \bar{\alpha} \,.\, \operatorname{surf}(P_1^2, g_0)$ et $\operatorname{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \,.\, g_0) = (\bar{\alpha})^{1/2} \,.\, \operatorname{carc}(P_1^2, g_0)$. D'où la première partie du théorème; la seconde se montre en suivant les égalités à la trace dans les inégalités.

Remarques : (i): on peut considérer (4.3) comme une espèce d'inégalité isopérimétrique (isocarcanique!) entre surface et longueur, la longueur de la frontière étant remplacée ici par le carcan pour la variété sans bord P_1^2; (ii): (4.3) est une caractérisation plaisante de la s.r. canonique de P_1^2.

5. *Généralisations possibles.*

Pour n quelconque, on peut définir $\operatorname{carc}(P_1^n, g)$ exactement par la formule (4.1) et remplacer (4.2) par

$$\textbf{(5.1)} \qquad \operatorname{quot}(P_1^n, g) = \frac{\operatorname{vol}(P_1^n, g)}{(\operatorname{carc}(P_1^n, g))^n} \,.$$

On calcule encore avec (13.1): tableau. Par contre un analogue de (4.3) est complètement ouvert; on ne sait pas si $\operatorname{quot}(P_1^n, g) \geqq \operatorname{quot}(P_1^n, g_0)$ pour toute g (pour les variations conformes $\alpha \,.\, g_0$, c'est facile, démonstration analogue à celle de (4.3): voir [14]). A fortiori on ne sait pas si l'égalité est caractéristique de g_0. En fait on ne sait même pas si la borne inférieure $\inf_g \operatorname{quot}(P_1^n, g)$, pour g parcourant toutes les s.r. sur P_1^n, est strictement positive.

En fait on peut encore généraliser toutes ces questions aux P_i^n. Remarquons pour ce faire que, dans P_1^n, dire qu'une courbe c n'est pas homotope à zéro est équivalent à dire qu'elle est homotope à P_1^1, la droite projective pour l'inclusion héréditaire $P_1^1 \subset P_1^n$. On a aussi des inclusions $P_i^1 \subset P_i^n$ pour tout i. Posons donc: