7. Théorèmes de Loewner, Blatter.

Ce qui démontre (voir (2.10)) que carc $(P_2^n, g_0) = \pi$, puis quot $(P_2^n, g_0) = \frac{1}{n!}$.

Soit maintenant g une s.r. kählérienne sur P_2^n telle que la forme de Kâhler associée ω vérifie $\omega = \omega_0 + d\alpha$, où $d\alpha$ est la différentielle extérieure d'une différentielle α de degré un. De telles s.r. existent: prendre une fonction $f: M \to \mathbf{R}$ et poser $\omega = \omega_0 + (-1)^{1/2}\delta\bar{\delta}f$; définir g par (6.1) à partir de ω. Pour f assez petite, g est encore définie positive. Pour toute variété hermitienne on a $v_g = \frac{1}{n!} \overset{n}{\wedge} \omega$, où n est la dimension complexe. On aura donc:

$$\mathrm{vol}\,(P_2^n, g) = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge}\, \omega = \frac{1}{n!} \int_{P_2^n} \overset{n}{\wedge}\, \omega_0 = \mathrm{vol}\,(P_2^n, g_0)$$

d'après la formule de Stokes. Puis, pour $Y \sim P_2^1$:

$$\mathrm{vol}\,(Y, g) \geqq \int_Y \omega\big|_Y = \int_{P_2^1} \omega\big|_{P_2^1} = \int_{P_2^1} \omega_0\big|_{P_2^1} = \mathrm{carc}\,(P_2^n, g_0)$$

donc carc $(P_2^n, g) =$ carc (P_2^n, g_0). D'où quot $(P_2^n, g) =$ quot (P_2^n, g_0) pour toute g du type précédent; or en général (P_2^n, g) et (P_2^n, g_0) ne seront pas isométriques; ainsi « *IC* (n;2) » est fausse.

La même méthode reste valable pour calculer quot (P_4^n, g_0) (resp. quot (P_8^2, g_0)). On considère cette fois-ci la forme canonique alternée de degré 4 (resp. 8) de P_4^n (resp. P_8^2); on aura carc $(P_4^n, g_0) =$ vol $(P_4^1, g_0) = \pi^2/6$, d'où quot (P_4^n, g_0) (voir tableau). De même: carc $(P_8^2, g_0) =$ vol $(P_8^1, g_0) =$ $=$ vol $(S^8, g_0/4) = \pi^4/8 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3$. (d'après (2.10)); d'où quot (P_8^2, g_0) (tableau). Par contre, on ne sait pas ce qu'il en est de « *IC* (n;4) » ou « *IC* (2;8) ».

7. *Théorèmes de Loewner, Blatter.*

La formule (4.1) peut encore servir à définir le carcan carc (M, g) de n'importe quelle variété riemannienne compacte, puis

(7.1) $$\mathrm{quot}\,(M, g) = \frac{\mathrm{vol}\,(M, g)}{(\mathrm{carc}\,(M, g))^n}\,, \ \mathrm{n} = \dim M.$$

Pour le tore de dimension deux $S^1 = S^1 \times S^1$, le résultat suivant a été obtenu avant celui de Pu:

(7.2): *théorème* (Loewner, [14]). *Pour toute* g: quot $(S^1 \times S^1, g) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$; *en outre* quot $(S^1 \times S^1, g) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *si et seulement si* $(S^1 \times S^1, g)$ *est isométrique à un tore équilatéral* (voir (2.4.2)).

TABLEAU

(on a posé $p) = (2p-1)\,.\,(2p-3)\,\ldots\ldots\,3.1)$

	$S^n = P^n_o$	P^2_1	$P^n_1 = P^n(\mathbf{R})\ (n \geqslant 3)$	P^n_2	P^n_4	P^2_8
vol $(P:; g_0)$	$n = 2p$: $2\,.\,\frac{(2\pi)^p}{p)}$ $n = 2p+1$: $2\,\frac{\pi^{p+1}}{p!}$	2π	$n = 2p$: $\frac{(2\pi)^p}{p)}$ $n = 2p+1$: $\frac{\pi^{p+1}}{p!}$ –	$\frac{\pi^n}{n!}$	$\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$	$\frac{\pi^8}{11.10.9.8.7.6.5.4}$
quot $(P:, g_0)$		$\frac{2}{\pi}$	$n = 2p$: $\frac{2^p}{p)}$ $n = 2p+1$: $\frac{\pi}{p!}$	$\frac{1}{n!}$	$\frac{6^n}{(2n+1)!}$	$\frac{7}{11}$
« I (. ; .) »		vraie	ouverte	ouverte	ouverte	ouverte
« IC (. ; .) »		vraie	ouverte	fausse	ouverte	ouverte
« P (. ; .) »		vraie	ouverte	ouverte	ouverte	ouverte

La démonstration démarre comme celle de (4.2), sauf qu'il n'y a même pas à prendre de revêtement. On aboutit à $\operatorname{quot}(S^1 \times S^1, g) \geqq \operatorname{quot}(\mathbf{R}^2/G, g_0/G)$, quotient d'un tore plat associé au réseau G de $\mathbf{R}^2$. Il reste ensuite le problème de géométrie élémentaire: étudier les quotients des tores plats.

Soit G_q *la* surface compacte orientable à q trous (ou surface orientable de genre q, toutes ces surfaces sont difféomorphes à G_q).

(7.3): *théorème* (Blatter, [3]). *Pour tout* q *quelle que soit la* s.r. *sur* G_q: quot $(\mathrm{G}_q, \mathrm{g}) \geqq (\mathrm{t}_{2q})^{1/q}$ (*où les* t_n *sont ceux définis par* (7.4)).

La démonstration diffère radicalement de celles de (4.2) et (7.2); elle repose sur l'emploi des formes harmoniques; et l'on intègre sur leurs courbes de niveau.

Pour $q \geqq 2$, la situation diffère de celle de (7.2); les b_q sont bien les meilleures possibles: $b_q = \inf_{g \text{ s.r. sur } G_q} \operatorname{quot}(G_q, g)$, mais cette borne n'est jamais atteinte si $q \geqq 2$ ([1], p. 309).

Une bonne généralisation naturelle est de se demander si

(7.4) $$\forall g\colon \operatorname{quot}((S^1)^n, g) \geqq \inf_{G \text{ réseau de } \mathbf{R}^n} \operatorname{quot}(\mathbf{R}^n/G, g_0/G) = t_n.$$

Non seulement cette question est ouverte, mais en outre les nombres arithmétiques t_n ne sont pas connus, sauf pour $2 \leqq n \leqq 8$ (voir [5], p. 332). On sait aussi que $t_n > 0$ et est réalisée effectivement: [5], corollary, p. 143. Enfin que t_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini: [5], p. 247.

Enfin, on voit bien quel est le problème type dont ceux qui précèdent ne sont que des cas particuliers; soit M une variété C^∞ compacte et α, β, ... différentes classes d'homologie, d'homotopie (libre) de M. Pour toute telle classe on définit, pour toute s.r. g sur M:

(7.5) $$\alpha(g) = \inf_{Y \in \alpha} \operatorname{vol}(Y, g)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les sous-variétés Y de M qui appartiennent à la classe α considérée. Remarquons en passant que l'on ne se préoccupe pas de la réalisation de $\alpha(g)$ par une sous-variété Y; mais ce n'est pas par manque d'intérêt! Le problème général est: existe-t-il, sur certaines variétés, des relations entre $\alpha(g)$, $\beta(g)$, ..., indépendantes de la s.r. g sur M? Le théorème de Pu est relatif au cas où α est la classe fondamentale (de dimension deux) de $P_1^2 = M$ et β la classe des droites projectives; on a $\alpha(g) \geqq \frac{2}{\pi}(\beta(g))^2$ pour toute g. Le théorème de Loewner montre, en tout cas, que si M, N sont deux variétés compactes, et si α (resp. β) est la classe d'homotopie de $M \times N$ qui représente M (resp. N), alors on n'a pas en général: $\mathrm{vol}(M \times N, g) \geqq \alpha(g) \cdot \beta(g)$ pour toute g. Voir aussi [11'].

Géodésiques.

8. *Définition.*

Après les volumes, les invariants riemanniens qui se présentent naturellement sont les géodésiques. Sur la v.r. (M, g) posons, pour deux points $m, n \in M$:

(8.1) $$d(m, n) = \inf_c \mathrm{long}(c, g)$$

(où la longueur est celle définie en (3.5) et la borne est inférieure est prise sur l'ensemble des courbes d'extrémités m, n).

On montre ([13], p. 62; [12], p. 166 toutes les références [12] réfèrent au vol. I de cet ouvrage, [1], p. 225) que d est une distance sur M; ainsi (M, g) est canoniquement un espace métrique. En outre la topologie de variété de M coincide avec la topologie de cette métrique ([13], p. 62; [12], p. 166; [1], p. 226). Les géodésiques de (M, g) sont les courbes de classe C^1 qui localement réalisent cette distance et sont à vitesse constante i.e. $c : I \to M$ (I intervalle de $\mathbf{R}$) est une géodésique si $|c'|$ est constante et si $\forall\, t \in I \, \exists\, t' > t$, $t' \in I$, tel que $\mathrm{long}(c|_{[t,t']}, g) = d(c(t), c(t'))$.

Pour $(\mathbf{R}^n, g_0)$ les géodésiques sont les droites (parcourues uniformément); pour une surface $S \subset \mathbf{R}^3$, ce sont les courbes dont l'accélération est normale à S.

On ne peut guère travailler qu'avec des v.r. *complètes*, c'est-à-dire complètes pour la distance (8.1). On démontre ([13], p. 62; [12], p. 172; [1], p. 235) que si (M, g) est complète:

(8.2) $\forall\, m, n \in M \, \exists\, c$, courbe d'extrémités m, n, telle que $\mathrm{long}(c, g) = d(m, n)$;

(8.3) $\forall\, x \in TM$ il existe une géodésique unique c: $\mathbf{R} \to M$ telle que $c'(0) = x$.

Remarques :

(8.4): la courbe dont l'existence est affirmée en (8.2) est toujours une géodésique; une telle courbe n'est pas unique en général: voir (9.2) et prendre sur (S^n, g_0) deux points m, n antipodes. Par contre on démontre