Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Kapitel: 10. Géodésiques périodiques.

Autor: Berger, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43854

dans [4], p. 466, le fait que le comportement des géodésiques de (P_8^2, g_0) est exactement le même que celui décrit précédemment pour les géodésiques des (P_i^n, g_0) $(i=1, 2, 4)$, en prenant $K = \mathbf{Ca}$ et $i = 8$.

10. *Géodésiques périodiques.*

(10.1): *définition: une géodésique* c : [a, b] → (M, g) *est dite* périodique *(ou* fermée*) si* c *est non constante et si* c′ (a) = c′ (b). *Elle est dite en outre* simple *si* $\mathrm{c}|_{[a,b[}$ *est injective.*

Le mot périodique est justifié parce que (8.3) montre que c se prolonge en une géodésique $\bar{c} : \mathbf{R} \to M$ telle que $\bar{c}|_{[a,b]} = c$ et $c(t+b-a) = c(t)$ pour tout t. La figure 1 ne représente pas une géodésique périodique (mais seulement un lacet géodésique), la figure 2 représente une géodésique périodique non simple, la figure 3 représente une géodésique périodique simple:

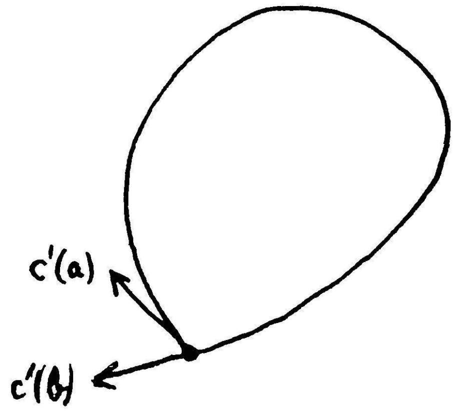

Fig. 1

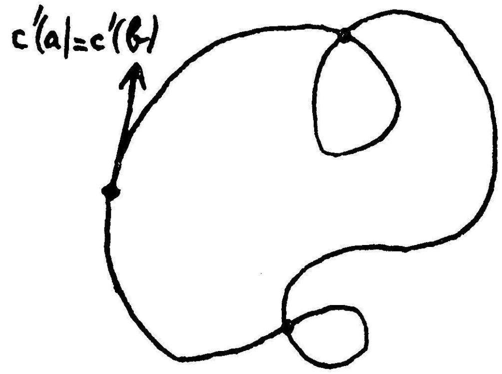

Fig. 2

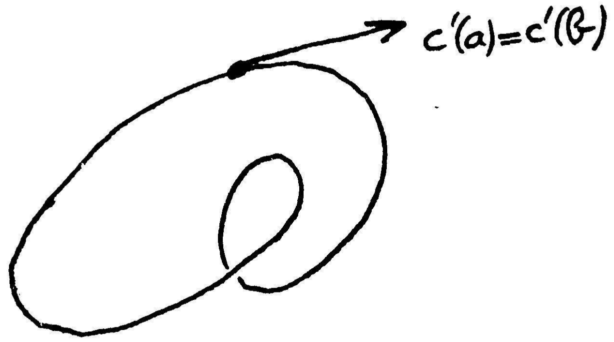

Fig. 3

Pour une v.r. (M, g) on introduit les trois assertions:

(10.2): « $GPS\,(m)$ »: $\forall\, x \in T_m M$, $x \neq 0$, la géodésique c telle que $c'(0) = x$ est périodique, simple et de longueur π;

(10.3): « GPS »: $\exists\, m \in M$ tel que « *GPS* (m) »;

(10.4): « *TGPS* »: $\forall\, m \in M$ on a « *GPS* (m) ».

Exemple: les $(S^n, \frac{1}{2}g_0)$ et les (P^n_i, g_0) $(i=1, 2, 4, 8)$ vérifient « *TGPS* ».

Ce qui précède conduit naturellement à deux types de problèmes: (i): dans quelle mesure « *GPS* » ou « *TGPS* » caractérisent-elles les (P^n_i, g_0)? (ii): existence d'une ou plusieurs géodésiques périodiques, voire une infinité, sur une v.r.

11. *Variétés telles que « GPS ».*

On peut seulement espérer au plus que « *GPS* » caractérisent les variétés différentiables P^n_i. En effet, soit m le pôle nord de S^n et G son groupe d'isotropie, c'est-à-dire $G = \{s \in S0\,(n+1) : s\,(m) = m\}$ (G est canoniquement isomorphe à $S0\,(n)$). Alors, pour n'importe quelle s.r. sur S^n qui est invariante par G (i.e. toutes les actions de G sont des isométries), on a « *GPS* (m) » (laissé au lecteur en exercice: les géodésiques issues de m sont les méridiens). Et, bien sûr, de telles s.r. n'ont aucune raison d'être isométriques à g_0.

Actuellement, d'une part on ne connait pas d'autres variétés que les P^n_i à posséder une s.r. telle que « *GPS* ». D'autre part, on a le résultat suivant, dans lequel $H^*\,(.; \mathbf{Z})$ représente l'anneau de cohomologie entière:

(11.1): *théorème* (Bott: [2], Samelson: [15]): *soit* (M, g) *telle que* « GPS ». *Alors* $\exists$ n *et* $\exists$ i *tels que* $\mathrm{H}^*\,(\mathrm{M}; \mathbf{Z})$ *soit isomorphe en tant qu'anneau à* $\mathrm{H}^*\,(\mathrm{P}^n_i; \mathbf{Z})$.

Il faut remarquer qu'il existe ([6]) des variétés M, non homéomorphes à P^2_4, mais cependant telles que $H^*\,(M; \mathbf{Z})$ et $H^*\,(P^2_4; \mathbf{Z})$ soient isomorphes en tant qu'anneaux. C'est pourquoi il faudrait décider si, oui ou non, il existe sur une de ces M, une s.r. telle que « *GPS* ».

La démonstration complète de (11.1) est colossale. Le point de départ est la théorie de Morse usuelle. La condition « *GPS* » assure ceci: il existe une filtration convenable de $\Omega \cdot (M)$, l'espace des lacets à point base de M, par des sous-espaces $\Omega^{\cdot}_h\,(M)$, filtration telle que les nombres de Betti relatifs $b_k\,(\Omega^{\cdot}_{h+1}(M), \Omega^{\cdot}_h(M))$ soient tous nuls sauf un précis, qui est en plus égal à un. La suite spectrale de cette filtration permet alors de déterminer exactement $H^*\,(\Omega \cdot (M); \mathbf{Z})$ (à l'aide d'un seul entier encore inconnu i). De $H^*\,(\Omega \cdot (M); \mathbf{Z})$ on passe, par la suite spectrale de la fibration de Serre, à $H^*\,(M; \mathbf{Z})$, dont on montre que c'est un anneau de polynômes tronquée, le générateur est de degré i. Un résultat très profond de topologie algébrique assure que ceci ne peut se produire que pour $i + 0, 1, 2, 4$ et n quelconque ou si $i = 8$ pour $n = 1, 2$ (où $\dim M = ni$). C.Q.F.D.