11. Variétés telles que « GPS ».

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

(**10.3**): « GPS »: $\exists\, m \in M$ tel que « *GPS* (m) »;

(**10.4**): « *TGPS* »: $\forall\, m \in M$ on a « *GPS* (m) ».

Exemple: les $(S^n, \frac{1}{2} g_0)$ et les (P_i^n, g_0) $(i = 1, 2, 4, 8)$ vérifient « *TGPS* ».

Ce qui précède conduit naturellement à deux types de problèmes: (i): dans quelle mesure « *GPS* » ou « *TGPS* » caractérisent-elles les (P_i^n, g_0)? (ii): existence d'une ou plusieurs géodésiques périodiques, voire une infinité, sur une v.r.

11. *Variétés telles que « GPS ».*

On peut seulement espérer au plus que « *GPS* » caractérisent les variétés différentiables P_i^n. En effet, soit m le pôle nord de S^n et G son groupe d'isotropie, c'est-à-dire $G = \{s \in S0\,(n+1) : s\,(m) = m\}$ (G est canoniquement isomorphe à $S0\,(n)$). Alors, pour n'importe quelle s.r. sur S^n qui est invariante par G (i.e. toutes les actions de G sont des isométries), on a « *GPS* (m) » (laissé au lecteur en exercice: les géodésiques issues de m sont les méridiens). Et, bien sûr, de telles s.r. n'ont aucune raison d'être isométriques à g_0.

Actuellement, d'une part on ne connait pas d'autres variétés que les P_i^n à posséder une s.r. telle que « *GPS* ». D'autre part, on a le résultat suivant, dans lequel $H^*\,(.\,; \mathbf{Z})$ représente l'anneau de cohomologie entière: (**11.1**): *théorème* (Bott: [2], Samelson: [15]): *soit* (M, g) *telle que* « GPS ». *Alors* $\exists$ n *et* $\exists$ i *tels que* $\mathrm{H}^*\,(\mathrm{M}; \mathbf{Z})$ *soit isomorphe en tant qu'anneau à* $\mathrm{H}^*\,(\mathrm{P}_i^n; \mathbf{Z})$.

Il faut remarquer qu'il existe ([6]) des variétés M, non homéomorphes à P_4^2, mais cependant telles que $H^*\,(M; \mathbf{Z})$ et $H^*\,(P_4^2; \mathbf{Z})$ soient isomorphes en tant qu'anneaux. C'est pourquoi il faudrait décider si, oui ou non, il existe sur une de ces M, une s.r. telle que « *GPS* ».

La démonstration complète de (11.1) est colossale. Le point de départ est la théorie de Morse usuelle. La condition « *GPS* » assure ceci: il existe une filtration convenable de $\Omega \cdot (M)$, l'espace des lacets à point base de M, par des sous-espaces $\Omega_h^{\cdot}\,(M)$, filtration telle que les nombres de Betti relatifs $b_k\,(\Omega_{h+1}^{\cdot}(M), \Omega_h^{\cdot}(M))$ soient tous nuls sauf un précis, qui est en plus égal à un. La suite spectrale de cette filtration permet alors de déterminer exactement $H^*\,(\Omega \cdot (M); \mathbf{Z})$ (à l'aide d'un seul entier encore inconnu i). De $H^*\,(\Omega \cdot (M); \mathbf{Z})$ on passe, par la suite spectrale de la fibration de Serre, à $H^*\,(M; \mathbf{Z})$, dont on montre que c'est un anneau de polynômes tronquée, le générateur est de degré i. Un résultat très profond de topologie algébrique assure que ceci ne peut se produire que pour $i + 0, 1, 2, 4$ et n quelconque ou si $i = 8$ pour $n = 1, 2$ (où $\dim M = ni$). C.Q.F.D.