UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE LEBESGUE SUR LA DÉRIVATION DES FONCTIONS CROISSANTES

Autor(en): **Letta, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

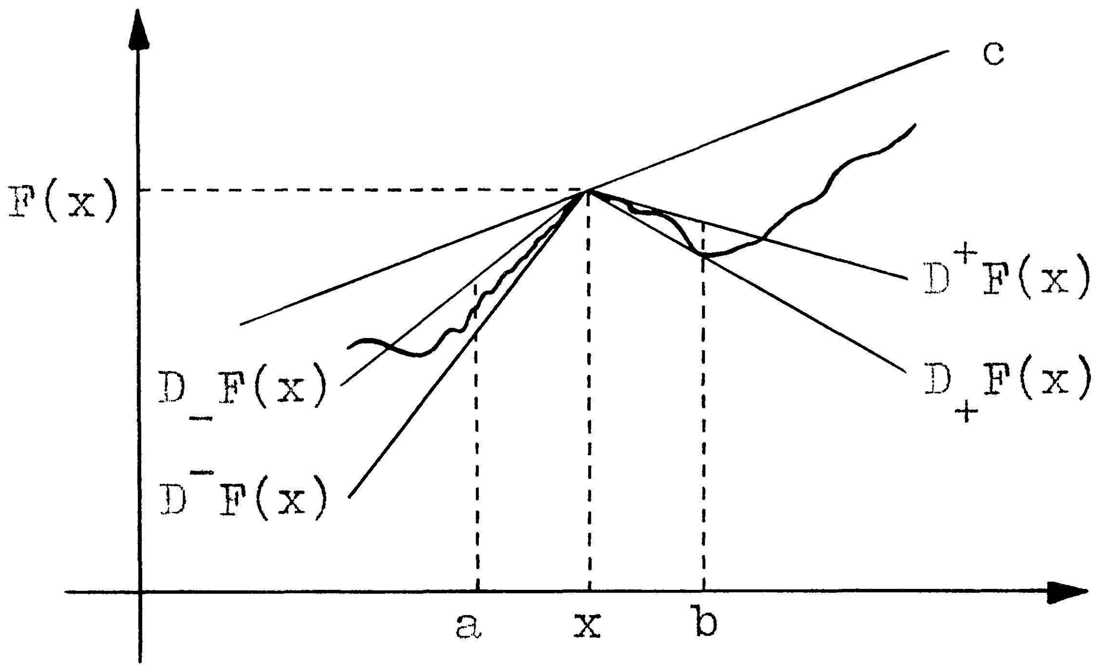
Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43860

On a évidemment $D_-F \leqq D^-F$, $D_+F \leqq D^+F$. En outre l'ensemble constitué par les x pour lesquels la relation $D_-F(x) \leqq D^+F(x)$ (respectivement $D_+F(x) \leqq D^-F(x)$) n'est pas vraie est dénombrable. En effet, pour tout x tel que l'on ait $D^+F(x) < D_-F(x)$, il existe des nombres rationnels a, b, c satisfaisant aux conditions suivantes (cf. figure):



$$a<x<b, \qquad \frac{F(y)-F(x)}{y-x} < c < \frac{F(z)-F(x)}{z-x}$$

pour y et z tels que $a<z<x<y<b$. De plus, pour a, b, c donnés, il existe au plus une valeur de x pour laquelle les conditions précédentes sont remplies. Il en résulte que l'ensemble des x tels que $D^+F(x) < D_-F(x)$ est l'image d'une partie de $\mathbf{Q}^3$, donc est dénombrable.

Enfin, si la fonction F est, ou bien croissante, ou bien continue, les quatre fonctions D_-F, D^-F, D_+F, D^+F sont boréliennes (car on a, par exemple, $D^+F(x) = \limsup\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0,\, h\in\mathbf{Q}}} [F(x+h) - F(x)]/h$).

Dans la suite, lorsqu'on parlera d'une fonction intégrable, ou d'un ensemble négligeable, ou d'une propriété vraie presque partout (p.p.), il sera toujours sous-entendu que ces notions sont relatives à la mesure de Lebesgue sur **R**.

THÉORÈME 1

Soit F une application de **R** *dans* **R**.

(a) *Si* $F_-(x) = F(x)$ *et* $D_+F(x) < +\infty$ *pour tout* x, *on a*

$$F(b) - F(a) \leqq \int_a^{*b} D_+F(x)\,dx \text{ pour } a<b \ (a, b \in \mathbf{R}).$$

(b) *Si* $F^+(x) = F(x)$ *et* $D_-F(x) < +\infty$ *pour tout* x, *on a*

$$F(b) - F(a) \leqq \int_a^{*b} D_-F(x)\,dx \text{ pour } a<b \ (a, b \in \mathbf{R}).$$

(c) *Si* $F^-(x) = F(x)$ *et* $D^+F(x) > -\infty$ *pour tout* x, *on a*

$$F(b) - F(a) \geqq \int_{*a}^{b} D^+F(x)\,dx \text{ pour } a<b \ (a, b \in \mathbf{R}).$$

(d) *Si* $F_+(x) = F(x)$ *et* $D^-F(x) > -\infty$ *pour tout* x, *on a*

$$F(b) - F(a) \geqq \int_{*a}^{b} D^-F(x)\,dx \text{ pour } a<b \ (a, b \in \mathbf{R}).$$

Démonstration

En appliquant la proposition (a) (resp. (b)) à la fonction $-F$, on obtient la proposition (c) (resp. (d)). De même, en appliquant (c) (resp. (d)) à la fonction $x \mapsto F(-x)$, on obtient la proposition (b) (resp. (a)). Il suffit donc de démontrer l'une quelconque des quatre propositions énoncées.

Démontrons la proposition (a). Supposons donc que l'on ait $F_-(x) = F(x)$ et $D_+F(x) < +\infty$ pour tout x, et fixons les nombres réels a, b tels que $a<b$.

Il suffira évidemment de prouver que l'on a

$$F(b) - F(a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx$$

pour toute fonction réelle f, semi-continue inférieurement sur $[a, b]$, intégrable et telle que l'on ait $D_+F(x) < f(x)$ pour tout x de $[a, b]$.

Soit f une fonction possédant ces propriétés, et posons, pour tout x de $[a, b]$,

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt - [F(x) - F(a)]\,.$$

Il s'agit de prouver que l'on a $g(b) \geqq 0$. L'ensemble A constitué par les x de $[a, b]$ tels que $g(x) \geqq 0$ n'est pas vide, car on a $a \in A$.

Désignons par c la borne supérieure de A. On a $g(c) = \lim_{x \to c,\, x \leqq c} \sup g(x) \geqq 0$ et par suite $c \in A$. En raisonnant par l'absurde, supposons que l'on ait $c < b$. Nous montrerons qu'il existe alors un élément c' de $[a, b]$ tel que $c' > c$, $g(c') > g(c)$. (Il en résultera $c' \in A$, contrairement à la définition de c.) Soit α un nombre réel tel que $D_+ F(c) < \alpha < f(c)$.

Puisque f est semi-continue inférieurement sur $[a, b]$, il existe un élément d de $]c, b]$ tel que $f(x) > \alpha$ pour tout $x \in [c, d]$; puisque $D_+ F(c) < \alpha$, il existe un élément c' de $]c, d]$ tel que $[F(c') - F(c)] / (c' - c) < \alpha$. On a alors

$$F(c') - F(c) < \alpha(c' - c) < \int_c^{c'} f(t)\, dt \,,$$

et par suite

$$g(c') - g(c) = \int_c^{c'} f(t)\, dt - [F(c') - F(c)[> 0 \,.$$

Le point c' répond donc à la question, et le théorème est démontré.

Corollaire 1

Soit F une application de **R** *dans* **R**.

(a) *Si F admet une dérivée finie F' en tout point, on a*

$$\int_{*a}^{b} F'(x)\, dx \leqq F(b) - F(a) \leqq \int_{a}^{*b} F'(x)\, dx \qquad (a < b,\ a,\ b \in \mathbf{R}) \,,$$

et par suite $\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$ *si la fonction (borélienne) F' est intégrable sur l'intervalle* $[a, b]$.

(b) *Supposons que la fonction F soit localement lipschitzienne. La fonction F est alors p.p. dérivable, sa dérivée F' (p.p. définie) est localement intégrable, et l'on a*

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a) \qquad (a < b,\ a,\ b \in \mathbf{R}) \,.$$

Démonstration

L'assertion (a) découle directement du théorème 1. Démontrons l'assertion (b). Les fonctions D_+F, D^+F, D_-F, D^-F sont boréliennes et localement bornées: elles sont donc localement intégrables. Il résulte alors du théorème 1

$$\int_a^b D^+ F(x)\,dx \leqq F(b) - F(a) \leqq \int_a^b D_+ F(x)\,dx \,,$$

$$\int_a^b D^- F(x)\,dx \leqq F(b) - F(a) \leqq \int_a^b D_- F(x)\,dx \,.$$

Ces inégalités deviennent d'autre part des égalités si l'on tient compte des inégalités évidentes: $D_+F \leqq D^+F$ et $D_-F \leqq D^-F$.

Il en résulte que chacune des quatre fonctions D_+F, D^+F, D_-F, D^-F est une version de la densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) de la mesure engendrée par F (c'est-à-dire de la mesure de Borel μ sur $\mathbf{R}$ déterminée par la condition $\mu([a, b]) = F(b)-F(a)$ pour $a<b$).

Cela prouve l'assertion (b).

Corollaire 2

Soit F une application croissante de **R** *dans* **R**, *et soit μ la mesure engendrée par F* (c'est-à-dire la mesure de Borel sur **R** déterminée par la condition $\mu([a, b]) = F(b)-F(a)$ pour tout couple a, b de points de continuité de F tels que $a<b$).

Si la mesure μ est singulière (par rapport à la mesure de Lebesgue), *on a $F'(x) = 0$ pour presque tout x.*

Démonstration

Comme F est croissante, on a $F^-(x) = F(x) = F_+(x)$ pour tout x, et les fonctions D^+F et D^-F sont boréliennes et positives. En appliquant le théorème 1, on trouve donc

$$\int_a^b D^+ F(x)\,dx \leqq F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b D^- F(x)\,dx \leqq F(b) - F(a) \qquad \text{pour } a<b.$$

Ces rèlations expriment que la mesure μ majore la mesure définie par la densité D^+F (resp. D^-F) par rapport à la mesure de Lebesgue. Cela entraîne que, si la mesure μ est singulière, la densité D^+F (resp. D^-F) est p.p. nulle, et cela démontre le corollaire.

THÉORÈME 2

Soit F une application croissante de **R** *dans* **R**, *et soit μ la mesure engendrée par F. On a alors les conclusions suivantes :*

1) *La fonction F est p.p. dérivable, et sa dérivée F'* (p.p. définie) *est localement intégrable.*

2) *La mesure λ définie par la densité F'* (par rapport à la mesure de *Lebesgue*) *est majorée par la mesure μ.*

3) *La mesure $\mu - \lambda$ est singulière* (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Démonstration

En vertu du corollaire 2, on peut se ramener (en retranchant de μ sa partie purement atomique) au cas où μ est diffuse (c'est-à-dire, au cas où F est continue). On peut aussi supposer que la mesure μ est portée par un intervalle compact $[a, b]$.

Il résulte de la démonstration du corollaire 2 que la mesure μ majore la mesure définie par la densité D^+F (resp. D^-F).

Désignons par A l'ensemble (négligeable pour la mesure de Lebesgue) constitué par les éléments x de $[a, b]$ tels que $D_+F(x) = +\infty$. Il suffira de montrer que l'on a [2]

$$\mu([a,b] \cap A^c) \leqq \int_a^b D_+ F(x)\, dx \tag{1}$$

(car alors on aura aussi

$$\int_a^b D^- F(x)\, dx = \int_{[a,b]\cap A^c} D^- F(x)\, dx \leqq \mu([a,b] \cap A^c) \leqq \int_a^b D_+ F(x)\, dx\,,$$

de sorte que les trois assertions du théorème découleront immédiatement, compte tenu des relations $D_+F(x) \leqq D^-F(x)$ et $D_-F(x) \leqq D^+F(x)$, qui sont vraies sur le complémentaire d'un ensemble dénombrable).

[2] On note A^c le complémentaire par rapport à **R** d'une partie A de **R**.

Pour démontrer la relation (1), il suffira de prouver que l'on a

$$\mu([a, b] \cap A^c) \leqq \int_a^b f(x)\,dx$$

pour toute fonction numérique f, semi-continue inférieurement sur $[a, b]$, telle que l'on ait $D_+F(x) < f(x)$ pour tout $x \in [a, b] \cap A^c$.

Soit f une fonction jouissant de ces propriétés, et désignons, pour tout $n \geqq 1$, par G_n l'ensemble (ouvert) constitué par les éléments x de $]a, b[$ pour lesquels il existe un x' tel que

$$(2) \qquad x + 1/n < x' \leqq b\,, \qquad F(x') - F(x) < \int_x^{x'} f(t)\,dt\,.$$

La suite (G_n) est croissante. En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, on voit que $]a, b[\cap A^c \subset \bigcup_n G_n$. Il suffit donc de prouver que, pour tout $n \geqq 1$, on a

$$\mu(G_n) \leqq \int_a^b f(t)\,dt\,,$$

c'est-à-dire

$$\mu(K) \leqq \int_a^b f(t)\,dt$$

pour tout ensemble compact $K \subset G_n$.

Soit K un ensemble compact contenu dans G_n. On voit sans peine que l'on peut recouvrir K par un nombre fini d'intervalles $[x, x']$ $(x \in K)$ satisfaisant aux conditions (2), deux à deux sans points intérieurs en commun. Si on désigne par H la réunion de ces intervalles, on a

$$\mu(K) \leqq \mu(H) \leqslant \int_H f(t)\,dt \leqq \int_a^b f(t)\,dt\,,$$

ce qui conclut la démonstration.

Remarque

Il résulte de la démonstration précédente que (si la fonction F est continue) la mesure singulière $\mu - \lambda$ est portée par l'ensemble des x tels que $D_+F(x) = +\infty$. En raisonnant de façon analogue (ou bien en appliquant le résultat précédent à la fonction $x \mapsto -F(-x)$), on voit que la mesure

$\mu - \lambda$ est portée aussi par l'ensemble des x tels que $D_{-}F(x) = +\infty$. On peut donc affirmer que la mesure $\mu - \lambda$ est portée par l'ensemble des points x où F admet une *dérivée* égale à $+\infty$.

Istituto di Matematica
Università di Pisa,
Italia.

UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE LEBESGUE SUR LA DÉRIVATION DES FONCTIONS CROISSANTES

par G. LETTA (Pisa)

RÉSUMÉ

On expose une démonstration élémentaire du théorème de Lebesgue concernant la dérivabilité p.p. d'une fonction F croissante et la décomposition de Lebesgue de la mesure engendrée par F. Cette démonstration ne fait pas appel au lemme de recouvrement de Vitali (ni à aucune autre proposition analogue). On démontre d'abord un théorème (Théor. 1) concernant une fonction F quelconque (non nécessairement croissante) et donnant un certain nombre d'inégalités entre l'accroissement $F(b)-F(a)$ de la fonction F sur un intervalle $[a, b]$ et les intégrales inférieures et supérieures, sur cet intervalle, des quatre dérivées généralisées de F.

Ce théorème permet déjà d'obtenir le théorème de Lebesgue dans le cas particulier où la fonction F est, ou bien localement lipschitzienne (Cor. 1), ou bien singulière (Cor. 2). On démontre ensuite le théorème de Lebesgue dans le cas général (Théor. 2).

Pour toute application F de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, nous poserons [1] (pour $x \in \mathbf{R}$)

$$F_-(x) = \liminf_{y \to x,\ y \leq x} F(y), \qquad F_+(x) = \liminf_{y \to x,\ y \geq x} F(y),$$

$$F^-(x) = \limsup_{y \to x,\ y \leq x} F(y), \qquad F^+(x) = \limsup_{y \to x,\ y \geq x} F(y),$$

$$D_- F(x) = \liminf_{y \to x,\ y < x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}, \qquad D_+ F(x) = \liminf_{y \to x,\ y > x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x},$$

$$D^- F(x) = \limsup_{y \to x,\ y < x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}, \qquad D^+ F(x) = \limsup_{y \to x,\ y > x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}.$$

---

[1] On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbf{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.