UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE LEBESGUE SUR LA DÉRIVATION DES FONCTIONS CROISSANTES

par G. LETTA (Pisa)

RÉSUMÉ

On expose une démonstration élémentaire du théorème de Lebesgue concernant la dérivabilité p.p. d'une fonction F croissante et la décomposition de Lebesgue de la mesure engendrée par F. Cette démonstration ne fait pas appel au lemme de recouvrement de Vitali (ni à aucune autre proposition analogue). On démontre d'abord un théorème (Théor. 1) concernant une fonction F quelconque (non nécessairement croissante) et donnant un certain nombre d'inégalités entre l'accroissement $F(b)-F(a)$ de la fonction F sur un intervalle $[a, b]$ et les intégrales inférieures et supérieures, sur cet intervalle, des quatre dérivées généralisées de F.

Ce théorème permet déjà d'obtenir le théorème de Lebesgue dans le cas particulier où la fonction F est, ou bien localement lipschitzienne (Cor. 1), ou bien singulière (Cor. 2). On démontre ensuite le théorème de Lebesgue dans le cas général (Théor. 2).

Pour toute application F de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, nous poserons [1] (pour $x \in \mathbf{R}$)

$$F_-(x) = \liminf_{y\to x,\ y\leq x} F(y) \ , \qquad F_+(x) = \liminf_{y\to x,\ y\geq x} F(y) \ ,$$

$$F^-(x) = \limsup_{y\to x,\ y\leq x} F(y) \ , \qquad F^+(x) = \limsup_{y\to x,\ y\geq x} F(y) \ ,$$

$$D_- F(x) = \liminf_{y\to x,\ y<x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \ , \qquad D_+ F(x) = \liminf_{y\to x,\ y>x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \ ,$$

$$D^- F(x) = \limsup_{y\to x,\ y<x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \ , \qquad D^+ F(x) = \limsup_{y\to x,\ y>x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \ .$$

---

[1] On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbf{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.