

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE LEBESGUE SUR LA DÉRIVATION DES FONCTIONS CROISSANTES
Kurzfassung: RÉSUMÉ
Autor: Letta, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43860>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE LEBESGUE SUR LA DÉRIVATION DES FONCTIONS CROISSANTES

par G. LETTA (Pisa)

RÉSUMÉ

On expose une démonstration élémentaire du théorème de Lebesgue concernant la dérivabilité p.p. d'une fonction F croissante et la décomposition de Lebesgue de la mesure engendrée par F . Cette démonstration ne fait pas appel au lemme de recouvrement de Vitali (ni à aucune autre proposition analogue). On démontre d'abord un théorème (Théor. 1) concernant une fonction F quelconque (non nécessairement croissante) et donnant un certain nombre d'inégalités entre l'accroissement $F(b) - F(a)$ de la fonction F sur un intervalle $[a, b]$ et les intégrales inférieures et supérieures, sur cet intervalle, des quatre dérivées généralisées de F .

Ce théorème permet déjà d'obtenir le théorème de Lebesgue dans le cas particulier où la fonction F est, ou bien localement lipschitzienne (Cor. 1), ou bien singulière (Cor. 2). On démontre ensuite le théorème de Lebesgue dans le cas général (Théor. 2).

Pour toute application F de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , nous poserons ¹ (pour $x \in \mathbf{R}$)

$$F_-(x) = \liminf_{y \rightarrow x, y \leq x} F(y), \quad F_+(x) = \liminf_{y \rightarrow x, y \geq x} F(y),$$

$$F^-(x) = \limsup_{y \rightarrow x, y \leq x} F(y), \quad F^+(x) = \limsup_{y \rightarrow x, y \geq x} F(y),$$

$$D_- F(x) = \liminf_{y \rightarrow x, y < x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}, \quad D_+ F(x) = \liminf_{y \rightarrow x, y > x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x},$$

$$D^- F(x) = \limsup_{y \rightarrow x, y < x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}, \quad D^+ F(x) = \limsup_{y \rightarrow x, y > x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}.$$

¹ On note \mathbf{R} l'ensemble des nombres réels, et \mathbf{Q} l'ensemble des nombres rationnels.