Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1971)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN CRITÈRE D'IRRÉDUCTIBILITÉ DES POLYNOMES

Kapitel: Notations

Autor: Mignotte, Maurice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44580

UN CRITÈRE D'IRRÉDUCTIBILITÉ DES POLYNOMES

par Maurice MIGNOTTE

NOTATIONS

A désigne un anneau commutatif unitaire tel que tout élément non nul de A n'a qu'un nombre fini de diviseurs.

P est un polynôme de degré $d \geqslant 1$ de $A[x]$.

$u = u(P) =$ nombre d'éléments $a \in A$ tels que $P(a)$ soit une « unité » de A.

$i = i(P) =$ nombre d'éléments $a \in A$ tels que $P(a)$ soit irréductible dans A.

Remarquons d'abord que 1 n'a qu'un nombre fini de diviseurs, ainsi il n'y a qu'un nombre fini d'unités $e_1, e_2, \ldots, e_k$ dans A.

Soient $a_{j,1}, \ldots, a_{j,u_j}$ les éléments tels que $P(a) = e_j, j = 1, \ldots, k$. A étant intègre, on a l'inégalité $u_j \leqslant d$. Donc $u = u_1 + \ldots + u_k$ est fini. Par contre, il peut se faire que i ne soit pas fini, si tel est le cas, dans tout ce qui suit on pourra remplacer i par un entier i' assez grand.

CRITÈRE D'IRRÉDUCTIBILITÉ

Théorème : Il existe une constante c (ne dépendant que de A) telle que l'inégalité

$$i + 2u - d > c$$

implique l'irréductibilité de P sur $A[x]$.

Démonstration:

Supposons que l'on ait $P = Q.R$ avec $Q, R \in A[x]$, avec $\deg(Q)$, $\deg(R) \geqslant 1$.
Les implications

$$P(a) \text{ irréductible} \Rightarrow Q(a) \text{ ou } R(a) \text{ inversible,}$$
$$P(a) \text{ inversible} \Rightarrow Q(a) \text{ et } R(a) \text{ inversibles,}$$

conduisent à l'inégalité

$$u(Q) + u(R) \geqslant i + 2u$$